

2 电磁器件分析方法—磁网络法

2.1 磁路基础

磁场作为电磁器件实现机电能量转换的耦合介质,其强弱程度和分布状况不仅关系到电磁器件的参数和性能,还决定其体积和重量。然而大多数电磁器件的结构和形状比较复杂,并有铁磁材料和气隙并存,很难用麦克斯韦方程直接求解。因此,在实际工程中,常采用将求解域内的各个部分分别等效为一个磁导或者磁导和磁动势的支路,把抽象的磁场问题等效为磁路问题来求解的方法。依据电路磁路的相似性,解出各部分磁位,求得器件参数和性能。从工程观点来说,这种将复杂的磁场问题简化为磁路计算的方法,其准确度是足够的。

2.1.1 磁场的几个常用物理量

1. 磁感应强度 B

磁场是电流通入导体后产生的,表征磁场强弱及方向的物理量是磁感应强度 B ,它是一个矢量。磁场中各点的磁感应可以用闭合的磁感应矢量线来表示,它与产生它的电流方向可以用右手螺旋定则来确定,如图 1-1 所示。国际单位制中, B 的单位为 T (特斯拉), $1\text{T} = 1\text{Wb}/\text{m}^2$ 。

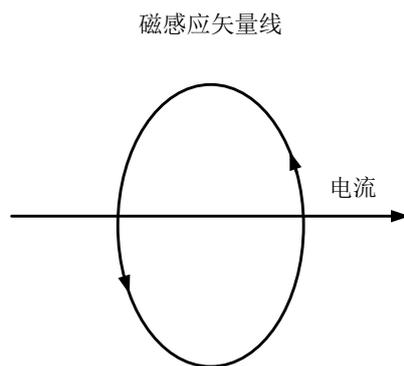


图 2-1 磁感应矢量线回转方向与电流方向的关系

2. 磁通 Φ

在均匀磁场中,磁感应强度 B 的大小与垂直于磁场方向面积 A 的乘积,为通过该面积的通量,简称磁通 Φ (一般情况下,磁通量的定义为 $\Phi = \int B dA$)。由于 $B = \Phi/A$, B 也称为磁通量密度,简称磁通密度。若用磁感应矢量线来描述磁场,通过单位面积磁感应矢量线的疏密反映了磁感应强度(磁通密度)的大小以及磁通量的多少。国际单位制中, Φ 的单位

为 Wb (韦[伯])。

3. 磁场强度 H

磁场强度 H 是计算磁场时所引用的一个物理量, 它也是一个矢量。它与磁感应强度 B 的商等于磁导率 μ , μ 是用来表示物质磁导能力大小的量, 即

$$\mu = B/H \quad (2.1)$$

真空的磁导率为 μ_0 , 国际单位制中 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$, 铁磁材料的磁导率 $\mu_{Fe} \gg \mu_0$ 。

2.1.2 磁路的概念

如同把电流流过的路径称为电路一样, 磁通所通过的路径称为磁路。不同的是磁通的路径可以是磁体, 也可以是非磁体。图 2-2 所示为常见的磁路。

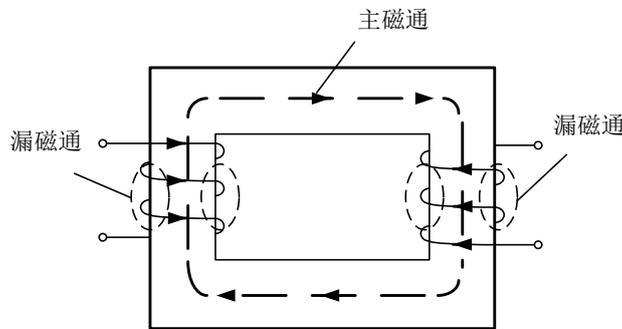


图 2-2 变压器磁路

在电机和变压器里, 常把线圈套装在铁心上, 当线圈内通有电流时, 在线圈周围的空间 (包括铁心内、外) 就会形成磁场。由于铁心的导磁性能比空气要好得多, 所以绝大部分磁通将在铁心内通过, 这部分磁通称为主磁通, 用来进行能量转换或传递。围绕载流线圈, 在部分铁心和铁心周围的空间, 还存在少量分散的磁通, 这部分磁通称为漏磁通, 漏磁通不参与能量转换或传递。主磁通和漏磁通所通过的路径分别构成主磁路和漏磁路。图 2-2 中示意地表示出了这两种磁路。

2.1.3 磁路的基本定律

进行磁路分析和计算时, 常用到以下几条定律。

1. 安培环路定律

沿着任何一条闭合回线 L , 磁场强度 H 的线积分值 $\oint_L H \cdot dl$ 等于该闭合回线所包围的总电流值 $\sum i$ (代数和), 这就是安培环路定律, 如图 2-3 所示。用公式表示, 即

$$\oint_L H \cdot dl = \sum i \quad (2.2)$$

式中, 若电流的正方向与闭合回线 L 的环行方向符合右手螺旋关系, i 取正号, 否则取

负号。例如，在图 2-3 中， i_2 取正号， i_1 和 i_3 取负号，故有 $\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = -i_1 + i_2 - i_3$ 。

若沿着回线 L ，磁场强度 H 的大小处处相等（均匀磁场），且闭合回线所包围的总电流是由通有电流 i 的 N 匝线圈所提供，则式(2.2)可简写成

$$Hl = Ni \tag{2.3}$$

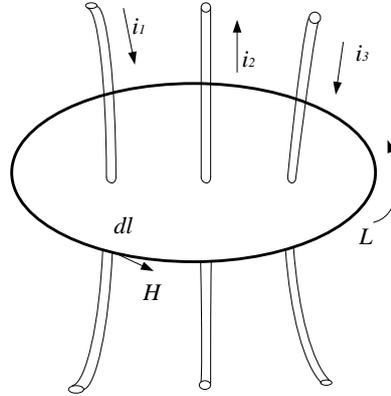


图 2-3 安培环路定律

2. 磁路的欧姆定律

图 2-4a 所示是一个等截面无分支的铁心磁路，铁心上有励磁线圈 N 匝，线圈中通有电流 i ；铁心截面积为 A ，磁路的平均长度为 l ， μ 为材料的磁导率。若不计漏磁通，并认为各截面上磁通密度均匀，且垂直于各截面，则磁通量将等于磁通密度乘以面积，即

$$\Phi = \int B dA = BA \tag{2.4}$$

根据式(2.1)，式(2.4)可改写成如下形式：

$$Ni = lB/\mu = \Phi l/(\mu A) \tag{2.5}$$

或

$$F = \Phi R_m = \Phi/\Lambda \tag{2.6}$$

式中， F 为作用在铁心磁路上的安匝数，称为磁路的磁动势， $F=Ni$ ，单位为 A ； R_m 为磁路的磁阻， $R_m = l/(\mu A)$ ，它取决于磁路的尺寸和磁路所用材料的磁导率，单位为 H^{-1} ，

$1H^{-1} = 1A/Wb$ ； Λ 为磁路的磁导， $\Lambda = 1/R_m$ ，它是磁阻的倒数，单位为 H ， $1H = 1Wb/A$ 。

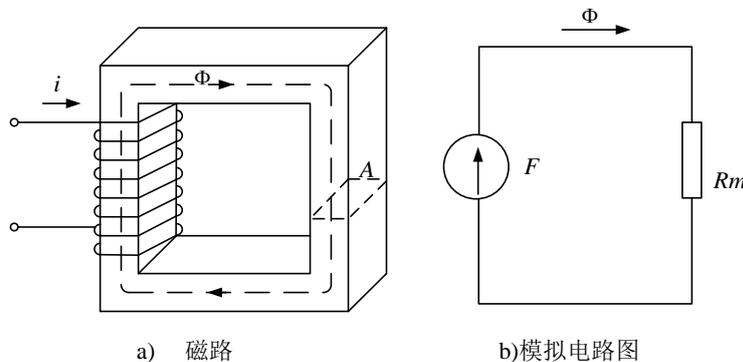


图 2-4 无分支铁心磁路

式(2.6)表明,作用在磁路上的磁动势 F 等于磁路内的磁通量 Φ 乘以磁阻 R_m , 此关系与电路中的欧姆定律在形式上十分相似, 因此式(2.6)称为磁路的欧姆定律。图 2-4b 所示为相应的模拟电路图。

【例 2-1】有一闭合铁心磁路, 铁心的截面积 $A = 9 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, 磁路的平均长度 $l = 0.3 \text{ m}$, 铁心的磁导率 $\mu_{Fe} = 5000\mu_0$, 套装在铁心上的励磁绕组为 500 匝。试求在铁心中产生 1 T 的磁通密度时, 需要多少励磁磁动势和励磁电流。

解: 用安培环路定律求解:

$$\text{磁场强度} \quad H = B/\mu_{Fe} = \frac{1}{5000 \times 4\pi \times 10^{-7}} \text{ A/m} = 159 \text{ A/m}$$

$$\text{磁动势} \quad F = Hl = 159 \times 0.3 \text{ A} = 47.7 \text{ A}$$

$$\text{励磁电流} \quad i = F/N = \frac{47.7}{500} \text{ A} = 9.54 \times 10^{-2} \text{ A}$$

3. 磁路的基尔霍夫定律

(1) 磁路的基尔霍夫第一定律: 如果铁心不是一个简单的回路, 而是带有并联分支的磁路, 如图 2-5 所示, 当在中间铁心柱上加有磁动势 F 时, 磁通的路径将如图中虚线所示。若令进入闭合面 A 的磁通为负, 穿出闭合面的磁通为正, 从图 2-5 可见, 对闭合面 A 显然有

$$-\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0 \quad (2.7)$$

或

$$\sum \Phi = 0 \quad (2.8)$$

式(2.7)表明, 穿出或进入任一闭合面的总磁通恒等于零, 这就是磁通连续性定律。比拟于电路中的基尔霍夫第一定律 $\sum i = 0$, 该定律亦称为磁路的基尔霍夫第一定律。

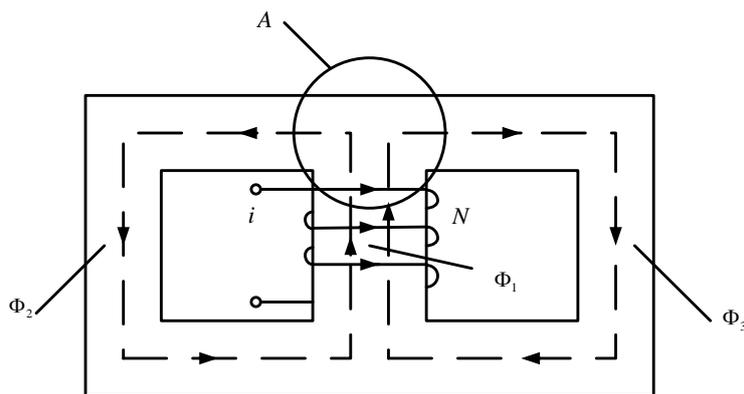


图 2-5 磁路的基尔霍夫第一定律

(2) 磁路的基尔霍夫第二定律: 电机和变压器的磁路总是由几段不同截面、不同铁磁材料的铁心组成, 还可能含有气隙。磁路计算时, 把整个磁路分成若干段, 每段由同一材料构成, 截面积相同且段内磁通密度处处相等。例如, 图 2-6 所示磁路由三段组成, 其中两段为截面不同的铁磁材料, 第三段为气隙。若铁心上的励磁磁动势为 Ni , 根据安培环路定律和磁路欧姆定律可得,

$$Ni = \sum_{k=1}^3 H_k l_k = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_\delta \delta = \Phi_1 R_{m1} + \Phi_2 R_{m2} + \Phi_\delta R_{m\delta} \quad (2.9)$$

式中， l_1 、 l_2 分别为1、2两段铁心的平均长度，其截面积各为 A_1 、 A_2 ； δ 为气隙长度； H_1 、 H_2 分别为1、2两段磁路内的磁场强度； H_δ 为气隙内的磁场强度； Φ_1 、 Φ_2 分别为1、2两段铁心内的磁通； Φ_δ 为气隙内磁通； R_{m1} 、 R_{m2} —分别为1、2两段铁心磁路的磁阻； $R_{m\delta}$ 为气隙磁阻。

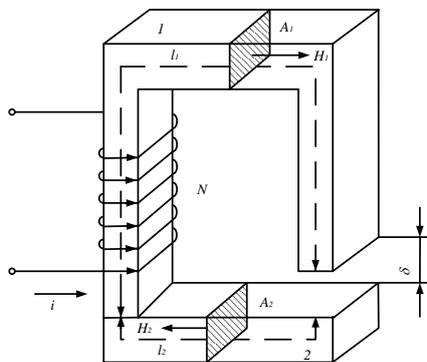


图 2-6 磁路的基尔霍夫第二定律

由于 H_k 是磁路单位长度上的磁位差，则 $H_k l_k$ 是一段磁路上的磁位差，它也等于 $\Phi_k R_{mk}$ ， Ni 是作用在磁路上的总磁动势，故式(2.9)表明：沿任何闭合磁路的总磁动势恒等于各段磁路磁位差的代数和。类比于电路中的基尔霍夫第二定律，该定律就称为磁路的基尔霍夫第二定律，此定律实际上是安培环路定律的另一种表达形式。

电路和磁路两者之间的类比关系如表 2-1所示。

表 2-1 电路和磁路之间的类比关系

磁路	变量	单位	电路	变量
磁动势 (MMF)	$F = \int H \cdot dl$	安匝 At	电动势	$\varepsilon = \int E \cdot dl$
磁场强度	H	安培/米 A/m	电场强度	E
磁通量	Φ	韦伯 Wb	电流	i
磁路欧姆定律	$F = \Phi R_m$		欧姆定律	$\varepsilon = iR$
磁阻	R_m	欧姆 Ω	电阻	R
磁导	$P=1/R_m$	亨 H	电导	$G=1/R$
磁感应强度	B	特斯拉 T	电流密度	J
磁导率	μ	亨/米 H/m	电导率	σ

表 2-1 中 R_m 与磁路的平均长度 l 成正比，与磁路的截面积 A 及构成磁路材料的磁导率 μ 成反比。需要注意的是，导电材料的电导率 σ 是常数，则电阻 R 为常数；而铁磁材料的磁导率 μ 和磁阻 R_m 均不为常数，是随磁路中磁感应强度 B 的饱和程度大小而变化的。这种情况称为非线性，因此用磁阻 R_m 对磁路定量计算时就不很方便，但一般用它定性说明磁路问题还是可以的。

此外，必须指出，磁路和电流虽然具有形式的类比关系，但是二者的物理性质却是不同的，分析计算时也有以下几点差别：

(1) 电路中，在电动势的驱动下，存在着电荷在电路中流动，并因此引起电阻的发热。

而磁路中磁通是伴随电流存在的，对于恒定电流，在磁导体中，并没有物质或能量在流动，因此不会在磁导体中产生损耗。即使在交变磁场下，磁导体中的损耗也不是磁通‘流动’产生的。

(2) 电路中电流限定在铜导线和其它导电元件内，导线外没有电流。而在磁路中，没有磁“绝缘”材料，磁导体周围空气形成磁路的一部分，有相当部分磁通从磁芯材料路径中发散出来，并通过外部空气路径闭合。对于磁路中具有空气隙的磁路，或没有磁芯的空心线圈更是如此。

(3) 在电路中，导体的电导率与导体流过的电流无关。而在磁路中，磁路中磁导率是与磁路中磁通密度有关的非线性参数。铁磁材料磁导率非线性导致相同磁路长度，产生不同的磁压降。磁路的计算中，需要由磁通求磁阻，又由磁阻求磁通，进行反复试探，作出系统的磁化曲线。

(4) 对于线性电路，计算时可以应用叠加原理，但对于铁心磁路，计算时不能应用叠加原理，因为铁心饱和时磁路为非线性。

可见，磁路计算是近似的。为了得到较精确的结果，首先应对静态磁场分布情况应当有较清晰的概念，才能作出合乎实际的等效磁路。

2.1.4 常用的铁磁材料及其特性

为了在一定的励磁磁动势作用下能激励较强的磁场，以使电磁器件的尺寸缩小、重量减轻、性能改善，须增加磁路的磁导率。当线圈的匝数和励磁电流相同时，铁心线圈激发的磁通量要比空气线圈大得多，所以电磁器件的铁心常用磁导率较高的铁磁材料制成。下面对常用的铁磁材料及其特性作简要说明。

1. 铁磁材料的磁化

铁磁材料包括铁、镍、钴等以及它们的合金。将这些材料放入磁场中，磁场会显著增强。铁磁材料在外磁场中呈现出很强的磁性，此现象称为铁磁物质的磁化。铁磁物质能被磁化的原因是在它内部存在着许多很小的被称为磁畴的天然磁化区。在图 1-7 中，磁畴用一些小磁铁来示意表明。在没有外磁场的作用时，各个磁畴排列混乱，磁效应互相抵消，对外不显示磁性，见 a) 未磁化

图 2-7a。在外磁场的作用下磁畴就顺外磁场方向而转向，排列整齐并显示出磁性来。这就是说铁磁物质被磁化了，见 a) 未磁化

图 2-7b。由此形成的磁化磁场，叠加在外磁场上，使合成磁场大为加强。由于磁畴产生的磁化磁场比非铁磁物质在同一磁场强度下所激励的磁场强得多，所以铁磁材料的磁导率 μ_{Fe} 要比非铁磁材料大得多。非铁磁材料的磁导率接近于真空的磁导率 μ_0 ，电机中常用的铁磁材料磁导率 $\mu_{Fe} = (2000 \sim 6000) \mu_0$ 。

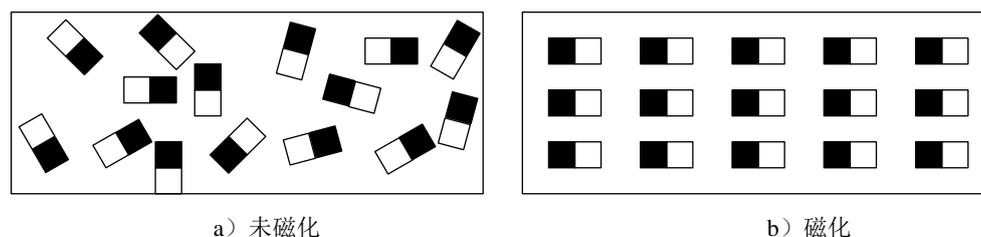


图 2-7 铁磁物质的磁化

2. 铁磁材料的分类

按照磁滞回线的形状不同，铁磁材料可分为软磁材料和硬磁（永磁）材料两大类。

(1) 软磁材料

磁滞回线较窄，剩磁 B_r 和矫顽力 H_c 都小的材料，称为软磁材料，如图 2-8a 所示。常用的软磁材料有电工硅钢片、铸铁、铸钢等。软磁材料磁导率较高，可用于制造电机、变压器的铁心。磁路计算时，可以不考虑磁滞现象，用基本磁化曲线是可行的。

(2) 硬磁材料

磁滞回线较宽，剩磁 B_r 和矫顽力 H_c 都大的铁磁材料称为硬磁材料，如图 2-8b 所示。由于剩磁 B_r 大，可用于制成永久磁铁，因而硬磁材料亦称为永磁材料，如铝镍钴、铁氧体、稀土钴、钕铁硼等。

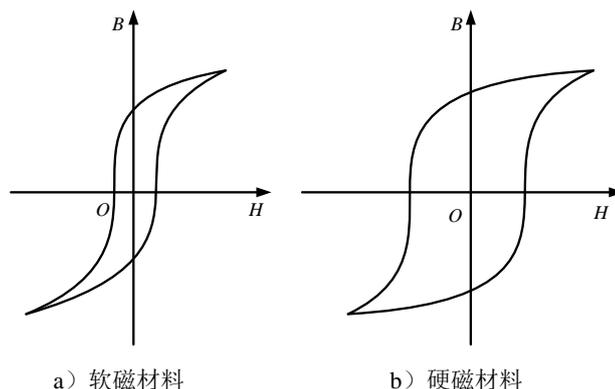


图 2-8 软磁和硬磁材料的磁滞回线

2.2 磁路计算

磁路计算所依据的基本原理是安培环路定律，其计算有两种类型，一类是给定磁通量，计算所需要的励磁磁动势，称为磁路计算的正问题；另一类是给定励磁磁动势，求磁路内的磁通量，称为磁路计算的逆问题。

对于磁路计算的正问题，步骤如下：

1. 将磁路按材料性质和不同的截面尺寸分段。
2. 计算各段磁路的有效截面积 A_k 和平均长度 l_k 。
3. 计算各段磁路的平均磁通密度 B_k ， $B_k = \Phi_k / A_k$ 。
4. 根据 B_k 求出对应的磁场强度 H_k ，对铁磁材料， H_k 可从基本磁化曲线上查出；对于空气隙，可直接用 $H_\delta = B_\delta / \mu_0$ 算出。

5. 计算各段磁路的磁位降 $H_k l_k$ ，最后求得产生给定磁通量时所需的励磁磁动势 F ，

$$F = \sum H_k l_k。$$

对于逆问题，由于磁路是非线性的，常用试探法去求解。

2.2.1 无气隙磁路

如果电路中两点之间有电位差，就可能在两点之间产生电流。同理，在磁路中两点之间有磁位差，在两点之间就可能产生磁通。图 2-9a 所示为一等截面环形磁芯，线圈均匀分布在磁芯上。这种磁路系统完全对称，可以应用相似于电路中电位分析方法，作出磁位分布图。根据磁位分布图，可以了解磁场的分布，确定等效磁路。

1. 均匀绕线环形磁芯

首先在磁路的平均长度上选取一点(或一个截面)作为磁位的参考点(即 $x=0$), 并假定沿磁芯中磁通的正方向 x 取正值, 然后求磁路中某 x 点相对于参考点的磁位差 U_x 。根据磁路基尔霍夫第二定律, 沿图示虚线闭合回路得到

$$F_x = U_{cx} + U_x \quad (2.10)$$

式中 F_x 为 $0 \rightarrow x$ 段磁路所匝链的线圈磁势, U_{cx} 为 $0 \rightarrow x$ 段磁芯的磁阻压降。

由于线圈均匀绕制, 所以 x 段线圈匝数为 $N_x = N/l$, 则 x 段磁势为,

$$F_x = \frac{xN}{l} I \quad (2.11)$$

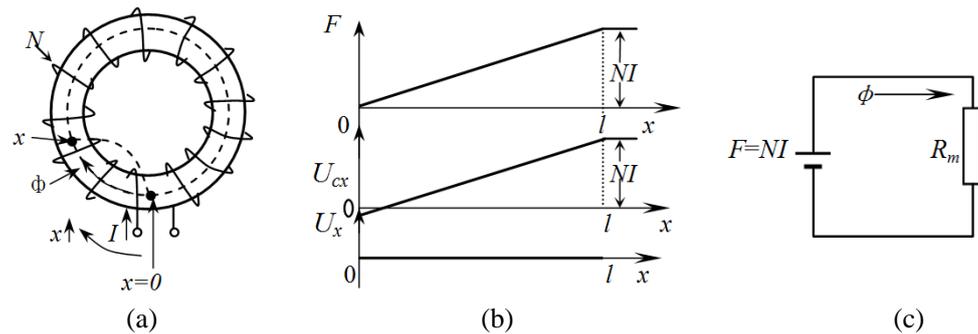
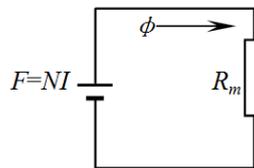


图 2-9 等截面均匀绕线环形磁芯磁位分布图和等效磁路

磁芯中的磁场强度 $H = IN/l$, 应有

$$U_{cx} = \int_0^x H dx = \frac{IN}{l} x \quad (2.12)$$

式中, IN 为线圈总磁势; l 为磁路平均长度。因此, 沿磁路平均长度展开, F_x 和 U_{cx} 的分布情况如图



2-9

(a)

(b)

(c)

图 2-9b 所示。

由图 2-9b 可见, U_{cx} 的分布和 F_x 完全相同。由式(2.10)得到 x 点与基准的磁位差

$$U_x = F_x - U_{cx} \quad (2.13)$$

也就是说, 将图形 F_x 减去 U_{cx} 图形, 就得到 U_x 分布情况。显然, U_x 处处为零。即等截面均匀绕线的环形磁铁任意点间没有磁位差, 即等磁位。在环外不会有任何漏磁通, 磁力线局限于导磁体内。

根据式(2.3)和(2.5), 因为磁场集中在线圈磁芯内, 各截面磁通相等, 故可将磁势和磁阻画成集中元件。图 2-9a 的等效磁路如图 2-9c 所示。

2. 集中绕线的等截面环形磁芯

若磁芯线圈集中绕在一边, 如图 2-10a 所示。如果线圈长度为 l_w , 取其线圈中点为参考点。应用相似的方法, 得到磁势 F_x 分布, 从图 2-10b 可以看出, 在 x 方向 $l_w/2$ 至 $l-l_w/2$ 段, 没有增加匝链磁势, 故为一水平线。如果有漏磁通存在, 磁芯各截面的磁通密度和 H_x 不再

是常数, U_{cx} 也就不能用式(2.12)来计算。如果漏磁通的比例很小, 假设 H_x 为常数, 可以作出 U_{cx} 分布图, 如图 2-10b 所示。由上述两个图相减, 就得到磁位差 U_x 分布图。由图可见, 除对称轴($x=0$ 和 $l/2$)外, 磁路中 U_x 都不等于零, 因此有漏磁通 Φ_s 分布于圆环周围空间, 如图 2-10c 所示。由于对称, 通过 $x=0$ 和 $x=l/2$ 的平面定义为零等磁位面。在磁芯中存在若干磁位相等的磁位面, 简称等位面。和电场一样, 在周围空间也存在等磁位面, 磁力线垂直于等位面, 终止在电流上(图 2-3、图 2-4 和图 2-10a)。

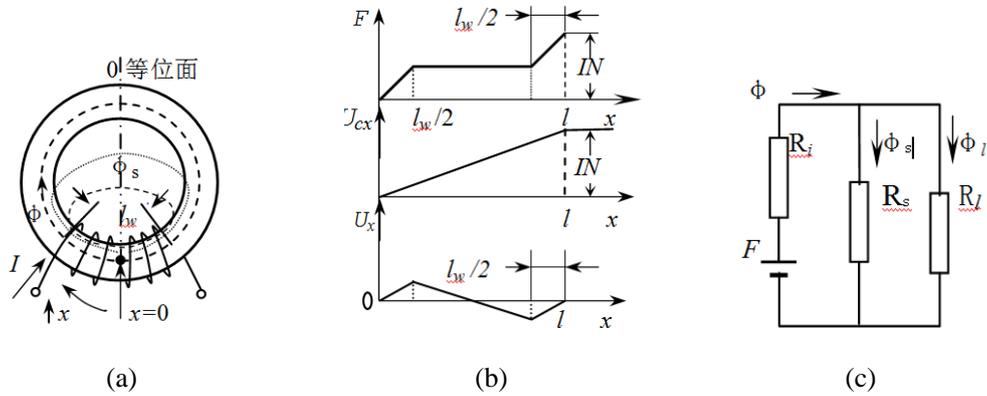


图 2-10 等截面集中绕线环形磁芯磁位分布图和等效磁路

由图 2-10a 可见, 在磁芯中 $x=0$ 处磁通最大, 由于磁芯截面积是均匀的, $x=0$ 处的磁通密度也就最大; 而 $x=l/2$ 处, 磁通最小, 磁通密度最低。在 $+l_w/2$ 和 $-l_w/2$ 之间磁位差最大, 因此磁力线最密。尽管漏磁通是分布在整个区域的, 但在画等效磁路时, 可近似等效为漏磁通是在最大磁位差的地方($\pm l_w/2$)流出的。因此有

$$\Phi = \Phi_c + \Phi_s \quad (2.14)$$

式中, Φ_c 为全部经过磁芯的磁通; Φ_s 是部分通过磁芯经过周围空气路径闭合的磁通。如果是电感线圈, Φ_s 是电感磁通的一部分, 如果是变压器, Φ_s 可能是主磁通的一部分, 其余是漏磁通, 也可能全部是漏磁通, 即部分或全部不与次级耦合。

等效磁路如图 2-10c 所示。图中 $R_i = l_w / \mu A - l_w$ 段磁阻, 相当于总磁势的内阻; 而 $R_l = (l - l_w) / \mu A - l_k$ 以外的磁芯磁阻。 R_s 为漏磁磁阻, 由经验决定。

3. 有气隙时环形磁芯磁场

图 2-11a 为线圈均匀绕, 等截面环形有气隙为 δ 的磁芯线圈。线圈磁势降落在磁芯和气隙两部分

$$F = IN = H_c l + H_\delta \delta \quad (2.15)$$

式中 H_c 和 H_δ 分别为磁芯和气隙的磁场强度。虽然气隙不大, 因空气磁导率比磁芯磁导率低得多, 所以气隙磁场强度 H_δ 比磁芯磁场强度 H_c 大得多。因此, $H_\delta \delta$ 占有总磁势的比例较大。

仍然取线圈中心为参考。 F , $H_c l$ 和 $H_\delta \delta$ 的分布图如图 2-11b 中实线所示, 磁芯的磁势图为线性增加。如仍假设 H_c 为常数, 与没有气隙一样, U_x 不等于零, 因此, 也有漏磁通 Φ_s , 所不同的是对称面左右两侧的磁位差比前者大, 所以漏磁通也大。

当磁芯有气隙时, 集中绕线将对称线圈放置气隙正对面时, 如图 2-11c 所示, 磁位分布图如图 2-11b 中虚线所示, 在大部分磁通路径上, 磁位差很大, 从图 2-11c 看到, 集中绕线比均匀分布绕线具有更大的漏磁。如果将集中对称线圈放置气隙上, 在绕线长度上磁势大部分降落在气隙上, 在线圈以外的磁芯上磁位差很小, 漏磁也很小, 如图 2-11b 中虚线

所示。

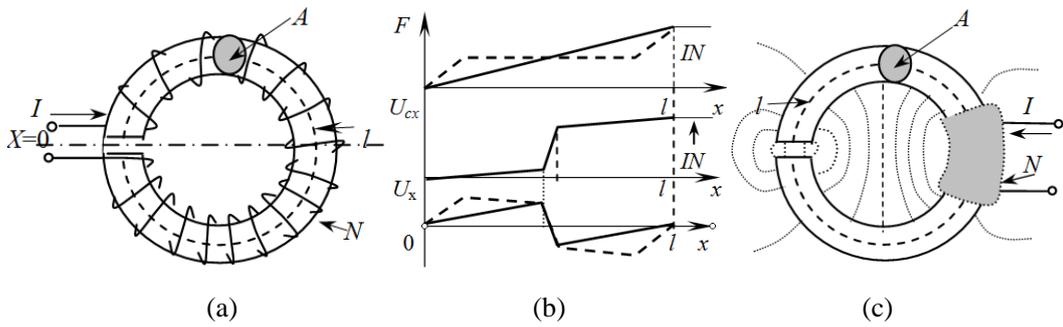


图 2-11 磁路中有气隙时磁位分布图

2.2.2 E 型磁芯磁场和等效磁路

E 型磁芯是最常用的磁芯形状，其它形状如 C 型，ETD 型，EC 型，RM 型等的等效磁路与 E 型相似。根据等截面原理，E 型磁芯的两个边柱的截面积之和等于中柱截面积，线圈一般绕在中柱上，如图 2-12 所示。

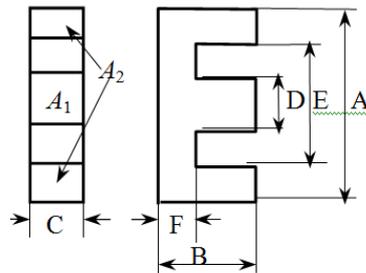


图 2-12 E 型磁芯尺寸图

1. 无气隙时等效磁路和磁位图

半个 E 型磁芯尺寸如图 2-12 所示。中柱的截面积

$$A_1 = C \times D \quad (2.16)$$

边柱截面积

$$A_2 = \frac{(A - E)}{2} \times C = \frac{A_1}{2} \quad (2.17)$$

端部面积

$$A_3 = F \times C \quad (2.18)$$

将两个磁芯柱端相对合在一起，形成闭合磁路，称为变压器磁芯，如图 2-13a 所示。中柱上绕有激励线圈 N 。假设忽略漏磁通，则在磁芯整个截面上磁通密度是均匀的，磁通的平均路径如图中虚线所示。因此

$$l_2 = 2B - F = l_1 \quad (2.19)$$

$$l_3 = \frac{E}{2} + \frac{A - E}{4} \quad (2.20)$$

因此各磁路段磁阻为

$$R_1 = \frac{l_1}{\mu A_1} \quad (2.21)$$

$$R_2 = \frac{l_2}{\mu A_2} \quad (2.22)$$

$$R_3 = \frac{l_3}{\mu A_3} \quad (2.23)$$

磁路总激励磁势 $F=NI$ ，其等效磁路如图 2-13b 所示。如果进行磁位分析，磁位分布图相似于图 2-11。因集中线圈占平均磁路长度的大部分，比环形磁路短，磁芯磁导率很高，漏磁通很少，通常忽略周围空气中磁场。

因为两个边柱是对称的，可合并成一路，简化的等效磁路如图 2-13c 所示。中柱通过的磁通

$$\Phi_1 = \frac{F}{R_1 + R_2' + 2R_3'} \quad (2.24)$$

式中，

$$R_2' = R_2 / 2 = l_2 / (2\mu A_2) \quad (2.25)$$

$$R_3' = R_3 / 2 = l_3 / (2\mu A_3) \quad (2.26)$$

因为 $A_1=2A_2=2A_3$ ，因此 $R = R_1 + R_2' + 2R_3' = 2(l_1 + l_2) / (\mu A_1) = 1/G$ 。式(2.24)可简化为

$$\Phi_1 = \frac{\mu ANI}{2(l_1 + l_2)} = NIG \quad (2.27)$$

式中， G 为总磁导。

最后等效磁路如图 2-13d 所示。

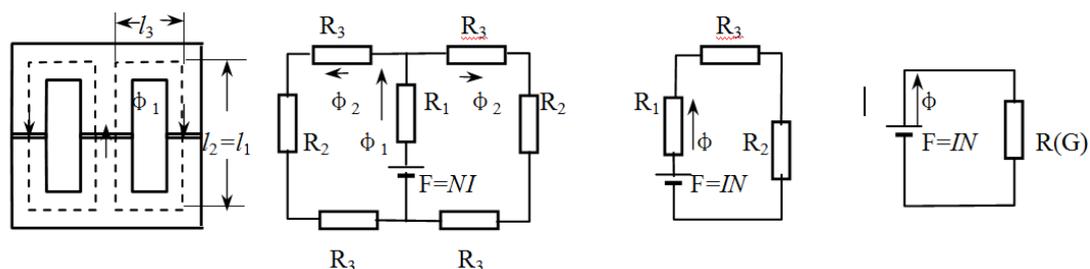


图 2-13 E 型磁芯等效磁路

2. 带气隙 E 型磁芯

带气隙的 E 型磁芯线圈一般作为直流滤波电感或反激变压器。如果线圈匝数为 N ，激励磁势为 $F=NI$ 。它的磁位分布图类似集中线圈的带气隙环形磁芯磁位图。当带有气隙时，一般可能有两种情况：EE 型磁芯中柱和边柱相同的空气隙，边柱气隙和中柱气隙相等，以及只有中柱气隙。

尽管气隙长度很小，但因磁芯磁导率远大于空气磁导率，所以气隙磁阻很大。两种情况磁位如图 2-14b 和图 2-14c 所示。比较两图可见，图 2-14b 在很长的磁路上磁位差较大，尤其在边柱部分较大，出现较多的漏磁通。如果磁场是脉动的，将对周围电路引起严重的干

扰磁场。而图 2-14c 仅在中柱有较大的磁位差，在相同的磁势下，磁位差明显小于图 2-14b。这说明仅中柱有气隙比三个芯柱都有气隙好。

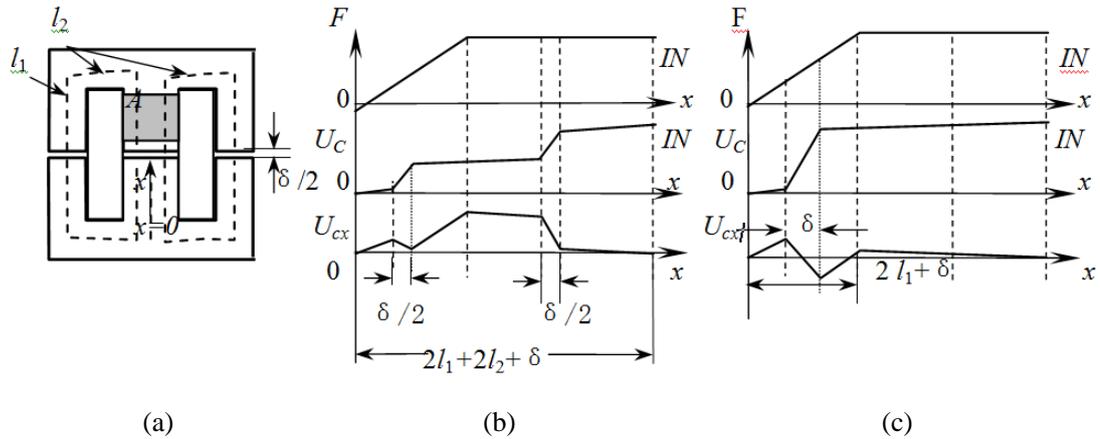


图 2-14 E 型磁芯中柱、边柱有气隙和只中柱有气隙磁位图

【例 2-2】图 2-15 所示变压器磁芯为 EE65。标称尺寸 $A=65\text{mm}$, $B=32.6\text{mm}$, $C=27\text{mm}$, $D=19.8\text{mm}$, $E=44.2\text{mm}$, $F=22.6\text{mm}$ 。假定磁芯 $\mu = \mu_0 \times 2000$ ，线圈绕在中柱上，匝数 $N_1=25$ 匝, $N_2=5$ 匝。初级加一个幅值为 400V，脉冲宽度 $T_{\text{on}}=3.6 \mu\text{s}$ 。次级电流峰值为 $I_{2p}=30\text{A}$ 的矩形波。求：1. 作出等效磁路图；2. 计算磁芯最大磁感应 B_{max} ；3. 计算次级电压 u_2 ；4. 计算初级电流最大幅值。如果在两半磁芯结合部有一个 0.05mm 的气隙，重复以上的计算。

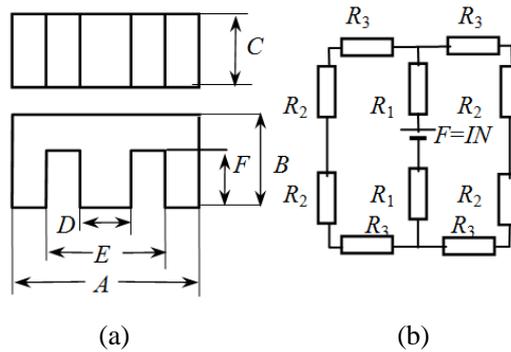


图 2-15 E 型磁芯线圈

解：1. 磁芯是由两半的一副组成。上下两半是对称的。平均磁路参考图 2-14a

$$l_1 = \frac{B + F}{2} = \frac{32.6 + 22.6}{2} = 27.6\text{mm} = 2.76\text{cm} = l_2$$

$$l_3 = \frac{A + E - D}{4} = \frac{65 + 44.2 - 19.8}{4} = 22.4\text{mm} = 2.24\text{cm}$$

中柱截面积

$$A_1 = D \times C = 1.98 \times 2.7 = 5.35\text{cm}^2$$

边柱截面积

$$A_2 = \frac{A - E}{2} \times C = \frac{6.5 - 4.42}{2} \times 2.7 = 2.81\text{cm}^2$$

端部截面积

$$A_3 = (B - F) \times C = (3.26 - 2.26) \times 2.7 = 2.7\text{cm}^2$$

等效磁阻

$$R_1 = \frac{l_1}{\mu A_1} = \frac{2.76 \times 10^{-2}}{4\pi \times 2000 \times 10^{-7} \times 5.35 \times 10^{-4}} = 2.045 \times 10^4 (\text{H}^{-1})$$

$$R_2 = \frac{l_2}{\mu A_2} = \frac{2.76 \times 10^{-2}}{4\pi \times 2000 \times 10^{-7} \times 2.81 \times 10^{-4}} = 3.91 \times 10^4 (\text{H}^{-1})$$

$$R_3 = \frac{l_3}{\mu A_3} = \frac{2.24 \times 10^{-2}}{4\pi \times 2000 \times 10^{-7} \times 2.7 \times 10^{-4}} = 3.3 \times 10^4 (\text{H}^{-1})$$

得到等效磁路中 R_1 , R_2 , R_3 。等效磁路如图 2-15b 所示。

2. 当输入电压为 400V, 持续时间 $T_{\text{on}}=3.5\mu\text{s}$, 得到中柱磁通

$$\Phi_{1lr} = \int_0^t \frac{u_i}{N_1} dt = \frac{U_1 T_{\text{on}}}{N_1} = \frac{400}{25} \times 3.5 \times 10^{-6} = 56 \times 10^{-6} (\text{Wb})$$

中柱最大磁通密度

$$B_{1\text{max}} = \frac{\Phi_{1lr}}{A_1} = \frac{56 \times 10^{-6}}{5.35 \times 10^{-4}} = 0.1047 (\text{T})$$

因中柱总磁通分成相等两部分通过边柱, 边柱(端部)面积之和大于中柱面积, 故磁通密度小于中柱。

3. 次级电压

$$u_2 = \frac{u_1 N_2}{N_1} = \frac{400 \times 5}{25} = 80 (\text{V})$$

4. 初级电流

$$i_1 = i_m + i_2 \frac{N_2}{N_1} = i_m + i_2^n$$

次级反射电流

$$i_2^n = \frac{N_2}{N_1} i_2 = \frac{5}{25} \times 30 = 6 (\text{A})$$

根据磁势平衡定律, 由式(3.6)得到

$$i_m N_1 = 2R_1 \Phi_1 + (2R_3 + 2R_2) \Phi_1 / 2$$

因此得到

$$i_m = \frac{\phi_1}{N_1} (2R_1 + R_2 + R_3) = \frac{56 \times 10^{-6}}{50} (2 \times 2.045 + 3.91 + 3.3) \times 10^4 = 0.127 (\text{A})$$

输入峰值电流

$$i_1 = i_m + i_2^n = 0.127 + 6 = 6.127 (\text{A})$$

如果两半磁芯结合处有 0.05mm 气隙, 仅在每个磁路中增加一个气隙磁阻, 因气隙相对端面

尺寸很小，可忽略边缘磁通，两边柱气隙磁阻相等

$$R_{s2} = \frac{\delta}{\mu_0 A_2} = \frac{5 \times 10^{-5}}{4\pi \times 10^{-7} \times 2.81 \times 10^{-4}} = 14.2 \times 10^4 (\text{H}^{-1})$$

中柱磁阻

$$R_{s1} = \frac{5 \times 10^{-5}}{4\pi \times 10^{-7} \times 5.35 \times 10^{-4}} = 7.44 \times 10^4 (\text{H}^{-1})$$

初级磁化电流

$$i_m = \frac{\Phi_1}{N_1} (2R_1 + R_{\delta 1} + R_2 + R_3 + \frac{R_{\delta 2}}{2}) = \frac{56 \times 10^{-6}}{50} (2 \times 2.045 + 3.91 + 3.3 + 7.44 + 14.2/2) \times 10^4$$

$$= 0.29 (\text{A})$$

磁芯仅 50 μm 气隙，气隙磁阻比总磁芯磁阻还要大，磁化电流增加一倍多，磁芯气隙对磁化电流影响很大。初级总的输入电流

$$i_1 = i_m + i_2^n = 0.29 + 6 = 6.29 (\text{A})$$

2.2.3 气隙磁导的计算

气隙磁导是磁路计算中十分重要的参数，其计算的准确度直接影响磁系统计算结果的精确性。

1. 气隙尺寸相对端面尺寸很小时磁导计算

在图 2-11 和图 2-14 中，如果气隙相对气隙端面尺寸很小(<5%)，可以忽略漏磁，认为磁芯气隙端面面积就是气隙截面积（尺寸参看图 2-12）。因此气隙磁导

$$G_\delta = \frac{\mu_0 A}{\delta} \quad (2.28)$$

对于 E 型磁芯，如果只是中柱带有气隙，同时气隙尺寸 $\delta \ll (C, D)$ 时，气隙磁导

$$G_\delta = \frac{\mu_0 C \times D}{\delta} \quad (2.29)$$

如果中柱和边柱都带有相同的气隙 δ ，则中柱 ($G_{1\delta}$) 和一个边柱 ($G_{2\delta}$) 磁导分别为

$$G_{1\delta} = \frac{\mu_0 C \times D}{\delta} \quad (2.30)$$

$$G_{2\delta} = \frac{\mu_0 C(A-E)}{2\delta} \quad (2.31)$$

总的气隙磁导

$$G = \frac{2G_{1\delta}G_{2\delta}}{G_{1\delta} + 2G_{2\delta}} \quad (2.32)$$

2. 气隙较大时，气隙磁导计算

在大多数情况下，气隙相对端面尺寸较大，磁通不仅经过磁芯的端面，而且还通过气隙的边缘，尖角，气隙附近的磁芯侧表面流通，如图 2-16 所示，这些磁通通常统称为边缘磁通。端面磁导仍然可按式(2.28)计算。边缘磁通计算十分复杂，有分析法，经验公式法，许多文献进行了讨论。对于规则形状可按以下经验公式求得：

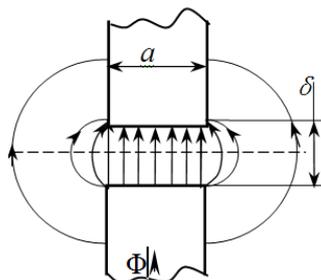


图 2-16 边缘磁通

(1) 相对正方形端面气隙磁导，如图 2-17 所示

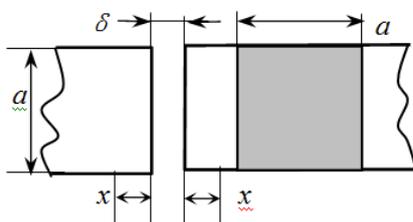


图 2-17 正方形端面气隙

$$\text{端面 } G = \mu_0 a \left[\frac{a}{\delta} + \frac{0.36}{2.4 + \delta/a} + \frac{0.14}{\ln(1.05 + \delta/a)} + 0.48 \right] \quad (2.33)$$

$$\text{当 } \frac{\delta}{a} < 0.2 \text{ 时, } G = \mu_0 \frac{a^2}{\delta}$$

由端面至 x 处的侧表面

$$G = \mu_0 \frac{xa}{0.17\delta + 0.4x} \quad (2.34)$$

通常取 $x=2\sim 3\delta$ 。总磁导为式 (2.33) 和 (2.34) 之和。

如果正方形端面对一个比端面大得多的平板，式 (2.33) 和 (2.34) 计算值放大一倍。

(2) 相对圆形端面气隙磁导，如图 2-18 所示

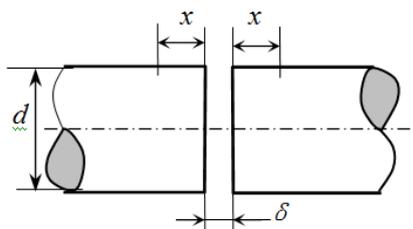


图 2-18 圆形端面气隙

$$\text{端面 } G = \mu_0 d \left[\frac{\pi d}{4\delta} + \frac{0.36d}{2.4d + \delta} + 0.48 \right] \quad (2.35)$$

$$\text{当 } \frac{\delta}{d} < 0.2 \text{ 时, } G = \mu_0 \frac{\pi d^2}{4\delta}$$

由端面至 x 处的侧表面

$$G = \mu_0 \frac{xd}{0.22d + 0.4x} \quad (2.36)$$

一般 $x=(2\sim 3)\delta$ 。

(3) 两个相等的矩形端面间气隙磁导

用有限元以及电磁场相似原则分析磁场虽然准确，但使用的情况毕竟有限。比较实用的方法是可以估计磁通可能的路径，把整个磁场分成几个简单的几何形状的磁通管。然后用分析法求解，或用以下近似公式：

$$G_{bk} = \mu_0 \frac{A_{bav}}{l_{bav}} = \mu_0 \frac{V_b}{l_{bav}^2} \quad (2.37)$$

式中， A_{bav} 为磁通管的平均截面积(米²)； l_{bav} 为磁通管内力线的平均长度(m)； V_b 为磁通管的体积(m³)； k 为磁通管编码。整个气隙磁导是这些磁导总和。

(a) 方形磁极

图 2-19 是一个正方形磁极。将气隙磁通路径分成的几何形状如图 2-19 中 1—半圆柱，2—半圆筒，3—1/4 圆球，4—1/4 圆球壳。分割的各磁通管如图 2-20 所示。

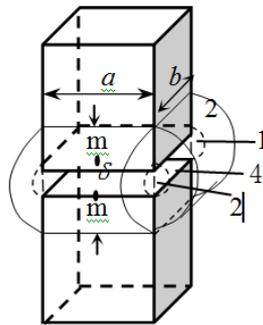


图 2-19 矩形磁极之间的边缘磁导

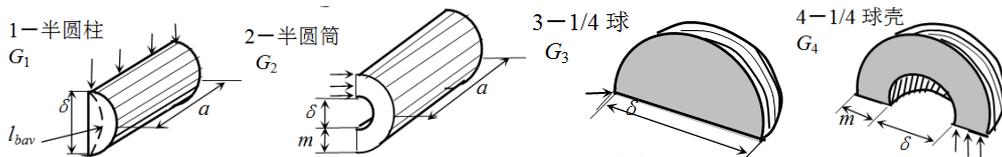


图 2-20 矩形端面分割的磁通管

以 2 号半圆筒为例，根据式(2.37)求得半圆筒磁导

$$G_2 = \mu_0 \frac{A_{bav}}{l_{bav}} = \mu_0 \frac{m \times a}{\pi(\delta + m)/2} = \frac{2\mu_0 a}{\pi \left(\frac{\delta}{m} + 1 \right)} \quad (2.38)$$

式中， $m=(1\sim 2)\delta$ ；平均磁路长度 $l_{bav} = \pi(\delta + m)/2$ ；截面积 $A_{bav} = m \times a$ 。

当 $\delta < 3m$ 时，

$$G_2^n = \mu_0 \frac{a}{\pi} \ln \left(1 + \frac{2m}{\delta} \right) \quad (2.39)$$

同理得到其它分割的磁导

$$\text{半圆柱 } G_1 = \mu_0 \times 0.26a \quad (2.40)$$

$$1/4 \text{ 球 } G_3 = \mu_0 \times 0.077\delta \quad (2.41)$$

$$1/4 \text{ 球壳 } G_4 = \mu_0 \times \frac{m}{4} \quad (2.42)$$

由式(2.28)得到端面间气隙磁导

$$G_0 = \frac{\mu_0 a^2}{\delta} \quad (2.43)$$

总的气隙磁导为

$$G = G_0 + 4(G_1 + G_2 + G_3 + G_4) \quad (2.44)$$

如果端面是 $a \times b$ 的矩形。取 $m = \delta$ ，则总磁导为

$$\begin{aligned} G &= G_0 + 4(G_3 + G_4) + 2(G_{1a} + G_{2a} + G_{1b} + G_{2b}) \\ &= 4\mu_0 \left[\frac{a \times b}{4\delta} + \frac{m(a+b)}{\pi(\delta+m)} + 0.13(a+b) + 0.077\delta + \frac{m}{4} \right] \end{aligned} \quad (2.45)$$

(b) 圆柱形磁极

圆柱形磁极之间的气隙磁导也可用正方形的分割法计算，将边缘磁导分成圆环和圆环壳。如柱的直径为 d ，气隙长度为 δ ，用分割法求得圆柱总气隙磁导为

$$G = \mu_0 \left[\frac{\pi d^2}{4} + 1.63 \left(\frac{2d + \delta}{4} \right) + (d + \delta) \ln \left(1 + \frac{2m}{\delta} \right) \right] \quad (2.46)$$

3. 气隙磁导粗略估算

从图 2-11 和图 2-14 可见，在气隙附近磁位差很大，存在强烈的边缘磁通，向外扩展超过气隙的边界，有效的气隙截面积大于磁芯端面截面积，即等效的气隙截面积增大了。为避免过大的误差，计算时必须根据有效截面积，而不是极端面积。经验近似方法是加一个气隙长度到磁芯端面尺寸上。对于边长 a 和 b 矩形极，有效气隙面积 $A_{\delta e}$ 近似为

$$A_{\delta e} = (a + \delta) \times (b + \delta) \quad (2.47)$$

对于直径为 D 的圆端面截面：

$$A_{\delta e} = \frac{\pi}{4} (D + \delta)^2 \quad (2.48)$$

当 $\delta = 0.1D$ 时，面积校正系数 $A_{\delta e}/A$ 为 1.21。 A 为磁极端面面积。

当校正系数低于 20% 以上，用前面经验公式是有帮助的，而更加精确的校正需要用有限元求解。

2.2.4 永磁体等效电路

在具体的磁路计算中,可以将永磁体等效成一个恒磁通源与一个内磁导相并联的磁通源。也可以等效成一个恒磁动势源与一个内磁导并联的磁动势源,如图 2-21 所示。

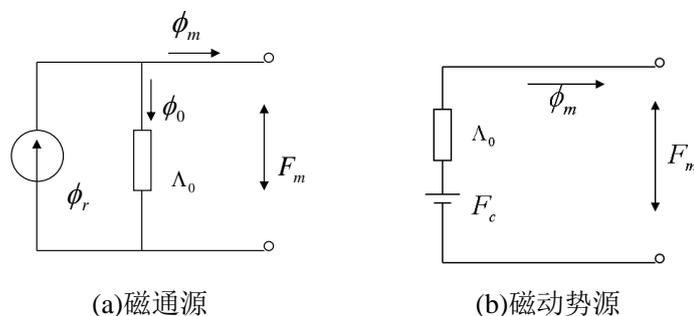


图 2-21 永磁体磁路等效

$$\text{永磁体内磁导 } \Lambda_0 = \frac{\mu_r \mu_0 A_m}{h_{MP}} \times 10^{-2} \text{ (H)}$$

$$\text{永磁体向外磁路提供的每极磁通 } \phi_m = BA_m \times 10^{-4} \text{ (Wb)}$$

$$\text{永磁体虚拟内禀磁通 } \phi_r = B_{ir} A_m \times 10^{-4} = B_r A_m \times 10^{-4} \text{ (Wb)}$$

$$\text{每对极中永磁体两端向外磁路提供的磁动势 } F_m = H h_{MP} \times 10^{-2} \text{ (A)}$$

$$\text{永磁体的虚拟内漏磁通 } \phi_0 = \Lambda_0 F_m \text{ (Wb)}$$

$$\text{永磁体磁动势源的计算磁动势 } F_c = H_c h_{MP} \times 10^{-2} \text{ (A)}$$

其中, h_{MP} 为永磁体磁化方向的长度。

2.3 磁网络解析

电磁器件的运行性能是由其内部的磁场分布决定的,根据其几何结构和磁通的预定走向,可以把磁场区域划分为若干串并联的支路,每条磁路由磁导或磁势源等单元组成,这些单元都直接与特定的几何形状和材料性能相关,单元与单元之间通过节点相联,就构成电磁器件的磁网络。根据磁网络与电网络的相似性,可以采用节点法或回路法来求解磁网络。依据磁网络的求解结果可以计算电磁器件的性能和参数。

等效磁网络法基于磁通管原理,把器件内部磁通密度相对均匀的部分看作一个单元,最后把各个节点用等效磁导连起来,构成一个磁导的网络图依据电路磁路相似性,解出各部分磁位,求得器件参数和性能。本节将通过一个实例介绍磁网络的基本知识。

2.3.1 互感耦合直线开关磁阻发电机（LSRM）的变结构磁网络模型

基于理想化假设的线性磁路模型采用分段线性的电感模型以线性矩阵的表示形式给出了互感耦合 LSRM 的特性参数，对电感精度要求不高的场合如电机性能的近似计算和控制方案的确定，提供了快捷可靠的模型样本库材料。但是在对电机进行优化设计和对电机运行特性进行分析时需要精确的数学模型。特别是在电机高功率密度时，磁场饱和程度加重，波形畸变严重，电机的实际性能和基于理想化假设的线性磁路模型的预测值会有一定的差距，因此线性磁路模型难以满足要求，而需要研究能够详细描述其边缘效应和磁路饱和影响的数学模型，这对于研究其结构变化所产生的复杂特性和后续的电机优化都具有非常现实的意义。

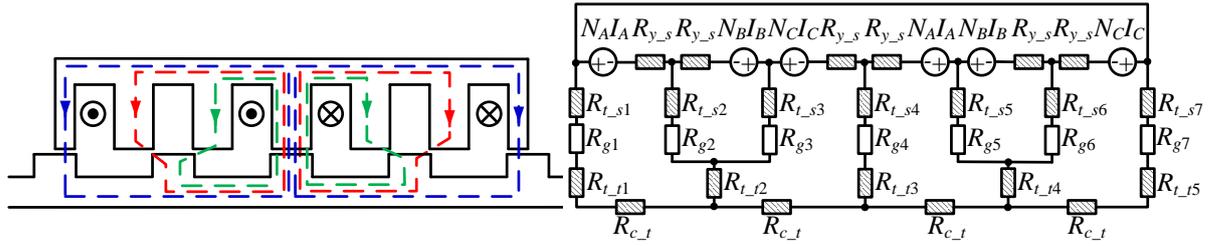
目前，大多数文献都采用有限元软件来分析具有边缘效应的直线电机，然而有限元分析密集的计算工作一般都会耗费不少时间，因此本节根据互感耦合 LSRM 的特点，基于磁网络理论，建立考虑磁路饱和和边缘效应的变结构磁网络模型，以此来简化模型的计算工作量。基于磁网络模型来研究开关磁阻电机的磁路饱和情况在不少文献中都有提及，而其中大部分都是以二维建模的方法对 RSRM 进行研究，而对于 LSRM 的研究较少。LSRM 有许多不同于 RSRM 的特点，如磁路开断引起的纵向边缘效应、初次级宽度不一致引起的横向边缘效应、现有机加工工艺的限制引起的相对大气隙、磁路不对称引起的法向力以及往复运动的工作模式等，这些特点使适用于 RSRM 的分析方法不完全适用于 LSRM，因此采用磁网络模型对互感耦合 LSRM 进行建模有更多需要进一步考虑的问题。另外，因为边缘效应的存在使二维的建模分析方法对互感耦合 LSRM 的特性描述变得不够充分，而需要考虑三维的磁场分布影响，对原有的二维模型做一些改进，使其能够更加准确的描述互感耦合 LSRM 的主要特性。

该模型在推导时做了如下假设：

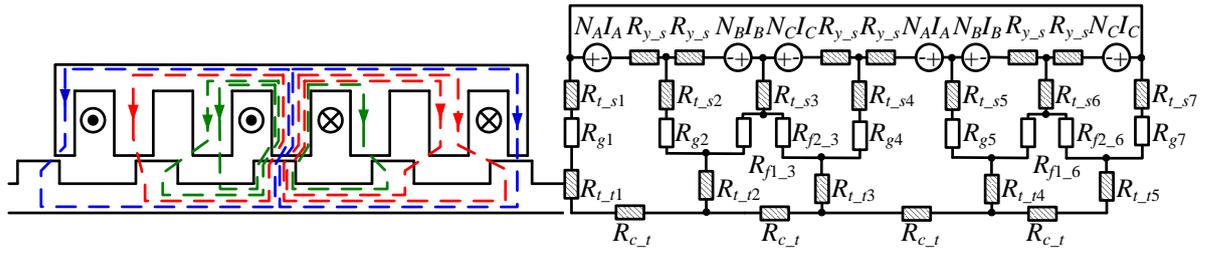
- （1）忽略涡流、磁滞效应影响；
- （2）忽略磁场中高次谐波，仅考虑基波分量。

建立电机磁网络模型的指导思想在于用电路的观点来考虑电机的磁路问题。主要的等效原则为：用电路中的电阻代表磁路中的磁阻，用电路中的支路电压源代表磁路中的电动势，用电路中的支路电流代表磁路中的磁通。由于互感耦合 LSRM 和传统 LSRM 磁路结构基本相似，因此两者的等效磁网络虽然相似，但又有着一些因边缘效应和特殊绕组分布而带来的本质区别。从有限元 2D 模型中静态磁场分布的情况可知，初次级齿对齐和不对齐情况下的磁通路径有很大的区别，因此用单一的磁网络模型来模拟这种多变化的磁结构是不够准确的。本文采用六个不同的磁网络模型来模拟这种多变化的磁路结构，图 2-22 给出了六个典型位置情况下的简化磁通路径和对应的磁网络模型。

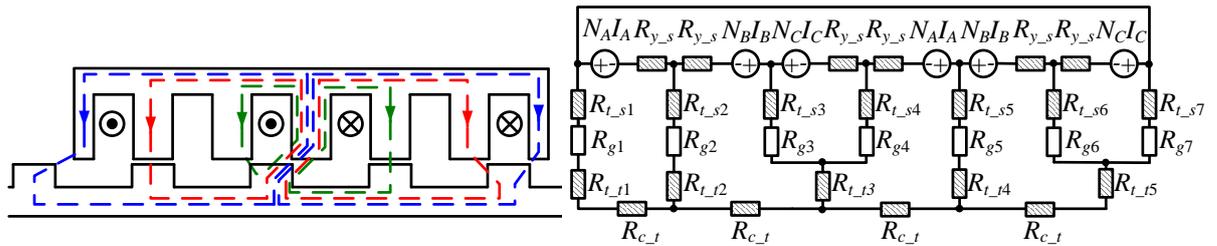
图 2-22 中的 x 表示初级相对次级的位移，定义初级齿 S3 和次级齿处于对齐位置时 $x=0\text{mm}$ 。在一个互感变化周期内（ $x=0\sim 36.75\text{mm}$ ）取六个典型位置，其中三个典型位置（ $x=0\text{mm}$ ， $x=12.25\text{mm}$ ， $x=24.5\text{mm}$ ）分别为初级齿 S3，S4，S5 和次级齿对齐的位置，其他三个典型位置为这三个对齐位置之间的不对齐位置。这里给出的六个典型位置为正向运动时的变化情况，而在反向运动时变化情况顺序与此相反，但磁网络模型结构与此相同。磁网络模型中包含两种磁阻—铁磁磁阻和空气磁阻，条纹状表示的铁磁磁阻采用不同的计算方法考虑了磁路非线性和磁路饱和的影响，而白色无条纹表示的空气磁阻阻则假设为理想情况下的真空磁阻。



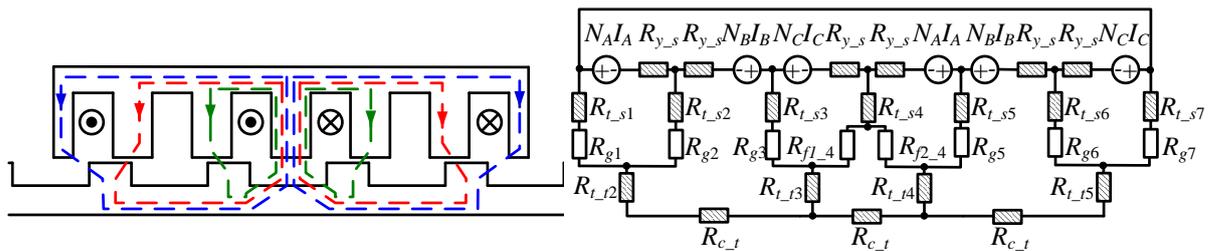
(a) $x=0\text{mm}$



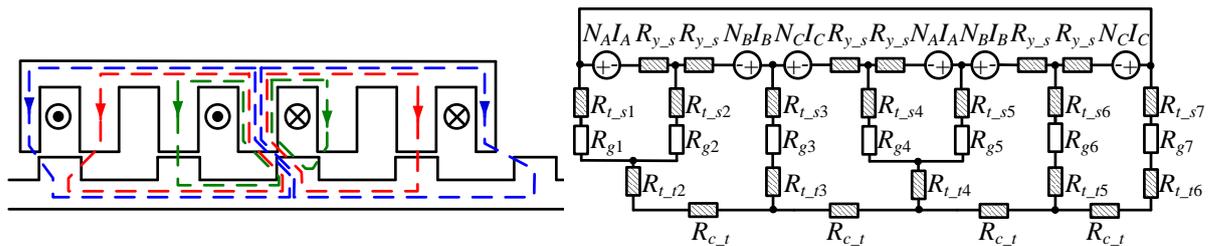
(b) $x=6\text{mm}$



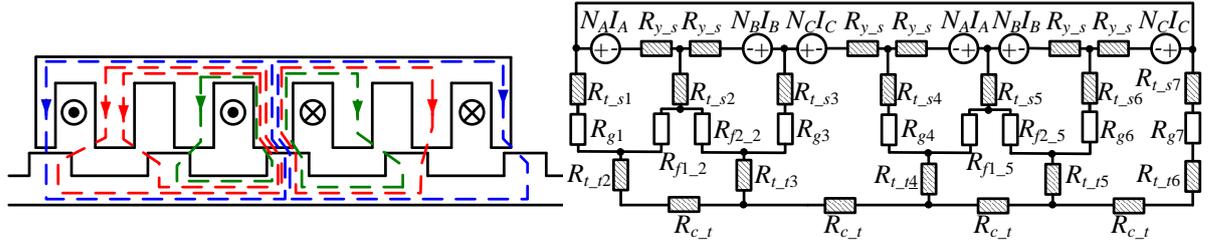
(c) $x=12.25\text{mm}$



(d) $x=18\text{mm}$



(e) $x=24.5\text{mm}$



(f) $x=30\text{mm}$

图 2-22 AC 绕组同时通电情况下的 6 个典型位置的简化磁路和对应的等效磁网络结构图

这六种不同结构的磁网络模型主要描述了每种励磁情况下，励磁初级齿和次级齿从对齐位置到下一个对齐位置区间，磁通分布变化的情况，考虑了磁路开断的边缘效应和磁饱和的影响。磁网络结构中不同位置的磁阻建模方法将在下面小节中进行详细阐述。

1. 初级和次级的磁阻计算

在均匀磁场分布的假设下，初级铁芯轭部的磁阻 R_{y-s} 和次级铁芯轭部的磁阻 R_{c-t} 按照普通磁阻建模。如式(2.49)和式(2.50)所示：

$$R_{y-s} = \frac{w_{sy}}{\mu l H_{sy}} \quad (2.49)$$

$$R_{c-t} = \frac{w_{ty}}{\mu l H_{ty}} \quad (2.50)$$

式中， w_{sy} 为初级铁芯轭的长度/m； μ 为磁导率，可以用样条函数插值的方法在非线性磁化曲线表上查表得出； l 为铁芯的横向有效长度/m； H_{sy} 为初级铁芯轭的高度/m； w_{ty} 为次级铁芯轭的长度/m； H_{ty} 为次级铁芯轭的高度/m。

由于齿根和齿顶的磁饱和情况不一样，在齿顶部分因为齿面和齿边的位置不同而饱和情况略有差异，因此本文中将初级齿在齿根和齿顶的磁阻分开建模。按照文献[88]和[91]中提到的建模方法，将初级齿分为上下两部分，每一部分为初级齿高的一半，靠近初级轭的齿根一部分按均匀磁场分布的假设，按照普通磁阻建模，表示为 R'_{t-s1} ；另一半靠近气隙的齿顶部分的磁阻 R'_{t-s2} 则可以等效为多个具有相同截面积的磁阻元素，用不同数量和不同分布形式的磁阻元素来表示齿顶的齿面和齿边不同程度的饱和情况，由图 2-23 所示。可以看出，在初次级齿对齐和不对齐情况下不同建模思想的指导下，最终可得到初级齿的等效磁阻 R_{t-s} 如式(2.51)所示：

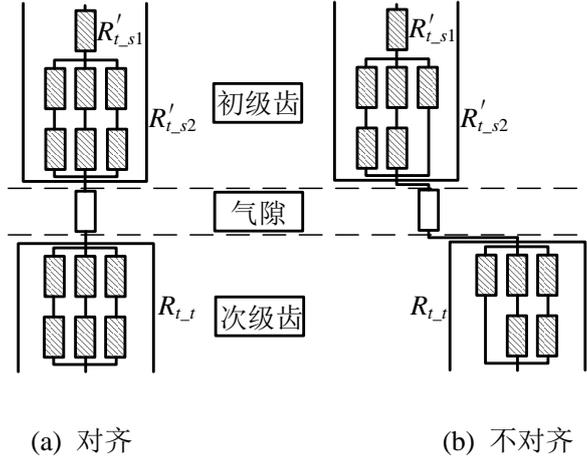


图 2-23 一对初级齿和次级齿的模型

$$R_{t-s} = R'_{t-s1} + R'_{t-s2} \quad (2.51)$$

其中,

$$R'_{t-s1} = \frac{H_s / 2}{\mu l w_s} \quad (2.52)$$

$$R'_{t-s2} = \begin{cases} \frac{H_s / 2}{\mu l w_s} & \text{对齐} \\ \frac{1}{2} \frac{H_s / 4}{\mu l w_s / 3} & \text{不对齐} \end{cases} \quad (2.53)$$

式中, H_s 为初级齿高/m, w_s 为初级齿宽/m。

类似于初级齿齿顶部分的建模方法, 次级齿的磁阻建模方法如下所示:

$$R_{t-t} = \begin{cases} \frac{H_t}{\mu l w_t} & \text{对齐} \\ \frac{1}{2} \frac{H_t}{\mu l w_t / 3} & \text{不对齐} \end{cases} \quad (2.54)$$

式中, w_t 为次级齿宽/m; H_t 为次级齿高/m。

另外, 针对互感耦合 LSRM 磁路开断带来的静态纵向边缘效应, 在对电机定子齿和初级齿磁阻建模时, 采用不相等的磁阻来计算端部齿和中间齿的不同磁阻, 本文用中间齿磁阻的一半来代表两边齿的磁阻, 即中间部分齿的磁阻为两边齿磁阻的一半。互感耦合 LSRM 的动态纵向边缘效应则因为电机运行速度不高而在这里不做讨论。

2. 气隙的磁阻计算

为简化仿真模型, 本文只考虑两种不同的气隙磁阻: 耦合磁阻和边缘磁阻。耦合磁阻根据相对位移的变化而变化, 它对应于耦合磁通, 直接耦合了每个次级齿和初级齿。而边缘

磁阻对应于边缘磁通，一部分耦合了次级齿边和初级齿面，另一部分耦合了初级齿边和次级齿面，本文按理想情况的假设将边缘磁通的路径简化为一系列弧线。图 2-24 给出了在初级齿和次级齿对齐和部分对齐位置情况下的边缘磁通和耦合磁通的分布情况。可以看出，在初级齿和次级齿对齐位置，磁阻最小而且只存在耦合磁阻，在初级齿和次级齿部分对齐位置，耦合磁阻和边缘磁阻同时存在。这里以初次级齿部分对齐和不对齐位置为例，将计算过程归纳如下。

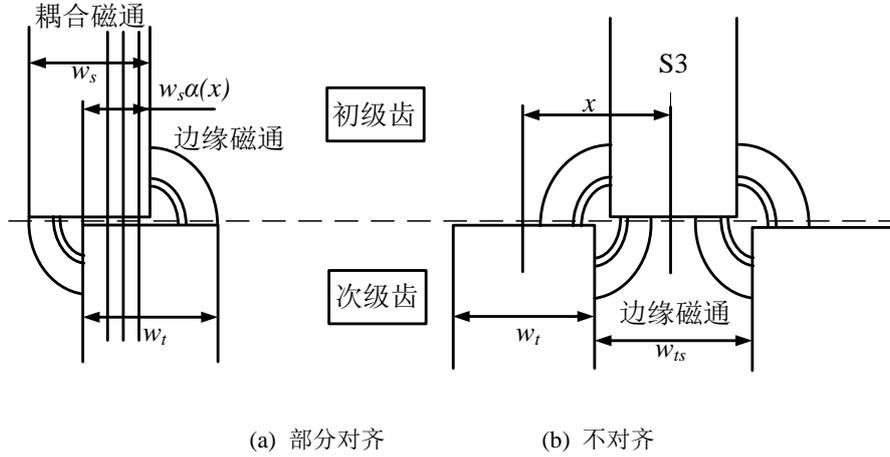


图 2-24 初级齿和次级齿间气隙的模型

对于图 2-24(a)所示的部分齿对齐的情况，气隙的等效磁阻 R_g 可以表示为耦合磁阻 R_l 和边缘磁阻 R_{f1} 、 R_{f2} 的并联。表达式如下：

$$1/R_g = 1/R_l + 1/R_{f1} + 1/R_{f2} \quad (2.55)$$

$$R_l = \frac{l_g}{\mu_0 l w_s \alpha(x)} \quad (2.56)$$

式中， l_g 为气隙长度/m； μ_0 为真空磁导率/ $\text{H}\cdot\text{m}^{-1}$ ； α 为相对重叠变量； x 为初次级相对位移/m。

由图 2-24 可知，边缘磁通的路径被简化为一个长轴为 x ，短轴为 l_g+kx 的 1/4 椭圆，其中 k 的表达式如下：

$$k = \frac{x}{x+l_g} \quad (2.57)$$

由此可以推得，

$$\begin{aligned} 1/R_{f1} &= \int_0^{w_t-w_s\alpha(x)} \frac{\mu_0 l (dx+kdx)/2}{\pi(x+l_g+kx)/4} dx \\ &= \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln\left(\frac{l_g^2+2l_g(w_t-w_s\alpha(x))+2(w_t-w_s\alpha(x))^2}{l_g^2}\right) \end{aligned} \quad (2.58)$$

$$\begin{aligned}
1/R_{f2} &= \int_0^{w_s - w_s \alpha(x)} \frac{\mu_0 l (dx + kdx) / 2}{\pi(x + l_g + kx) / 4} dx \\
&= \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \left(\frac{l_g^2 + 2l_g w_s (1 - \alpha(x)) + 2(w_s - w_s \alpha(x))^2}{l_g^2} \right)
\end{aligned} \tag{2.59}$$

考虑磁路的边缘效应，端部齿的相对重叠变量 α 和中间齿的相对重叠变量 α 的计算方法不一样。以总是同时对齐的中间齿 S3 和端部齿 S0 为例，图 2-25 给出了考虑静态纵向边缘效应后相对重叠变量的计算结果。与线性磁路模型一样，由于初次级结构的对称性，在运行过程中，对应于每个初级齿的相对重叠变量都会超前运行方向上的下一个初级齿的相对重叠变量 1 个机械位置 τ 。

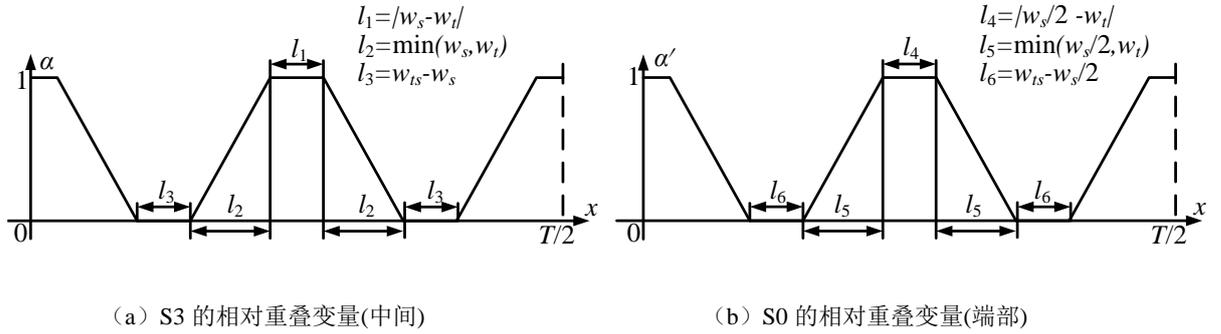


图 2-25 相对重叠变量定义

同理，对于图 2-24(b)所示不对齐位置的气隙磁阻 R_g 可以表示为 2 个边缘磁阻 R_{f1} , R_{f2} 的并联，可以由下式求得：

$$1/R_g = 2/R_{f1} + 2/R_{f2} \tag{2.60}$$

$$1/R_{f1} = \int_{w_t/2}^{x - w_s/2} \frac{\mu_0 l (dx + kdx) / 2}{\pi(x + l_g + kx) / 4} dx = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \left(\frac{l_g^2 + 2l_g (x - w_s/2) + 2(x - w_s/2)^2}{l_g^2 + l_g w_t + w_t^2 / 2} \right) \tag{2.61}$$

$$1/R_{f2} = \int_{x + w_s/2}^{w_t + w_s} \frac{\mu_0 l (dx + kdx) / 2}{\pi(x + l_g + kx) / 4} dx = \frac{\mu_0 l}{\pi} \ln \left(\frac{l_g^2 + 2l_g (w_t + w_s) + 2(w_t + w_s)^2}{l_g^2 + 2l_g (x + w_s/2) + 2(x + w_s/2)^2} \right) \tag{2.62}$$

式中， w_{ts} 为次级槽宽/m。

3. 考虑横向边缘效应后的参数校正

应用于低速大转矩的海洋环境的互感耦合 LSRM，纵向动态边缘效应相对不明显，因此这里的变结构磁网络模型只考虑纵向和横向的静态边缘效应。以上的模型中用不同的磁阻元素组合及不同的相对重叠变量定义将静态纵向边缘效应考虑在内。然而二维的磁场分析和数学建模并不能考虑静态横向边缘效应，因此文献中常采用三维的有限元分析方法对具有横向边缘效应的电磁设备进行分析，但是计算时间较长。为了对电机性能有较快的预测，这里

采用了与初级绕组电流密度和相对位移有关的边缘效应系数,根据上一小节介绍的等效磁网络模型,得到了包含漏磁效应影响的二维磁链矩阵 λ_{2D} ,而边缘效应系数 K_{ee} 只需考虑端部绕组磁场分布的影响。这里为简化三维磁链的计算,假设其绕组端部的情况如图 2-26 所示,虽然与实际绕组端部情况不完全相同,但仍能较好的反映三维空间里静态横向边缘效应带来的影响。

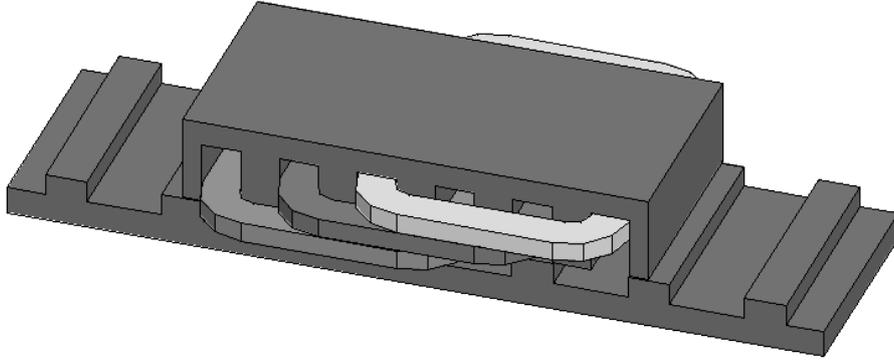


图 2-26 互感耦合 LSRM 的三维有限元模型

根据文献,三维磁链矩阵 λ_{3D} 可根据下式估算得出:

$$\lambda_{3D} = \lambda_{2D} \cdot K_{ee} \quad (2.63)$$

$$K_{ee} = 1 + iL_{end}K_{si} / \lambda_{2D} \quad (2.64)$$

$$L_{end} = 2N_c N^2 \mu_0 \frac{w_s + H_s}{2\pi} \ln\left(\frac{8}{0.447\sqrt{h_c d_c}} \frac{w_s + H_s}{2\pi} - 2\right) \quad (2.65)$$

$$K_{si} = 1.5(0.95 + 0.05 \cos \frac{\gamma}{2})$$

式中, i 为绕组相电流/A; L_{end} 为绕组端部电感/H; K_{si} 为铁磁系数,它是关于电机几何形状,磁饱和情况和相对位移的函数; N_c 为绕组线圈数; N 为线圈匝数; h_c 为绕组线圈的高度/m; d_c 为绕组线圈的厚度/m; γ 为初次级相对位移对应的弧度/rad,在初级齿和次级槽对齐位置时 $\gamma=0$,在初级齿和次级齿对齐位置时 $\gamma=\pi$ 。

4. 非线性解

在获得变结构磁网络模型的非线性方程组后,采用迭代和矩阵分析的方法对其进行求解,计算流程如图 2-27 所示。

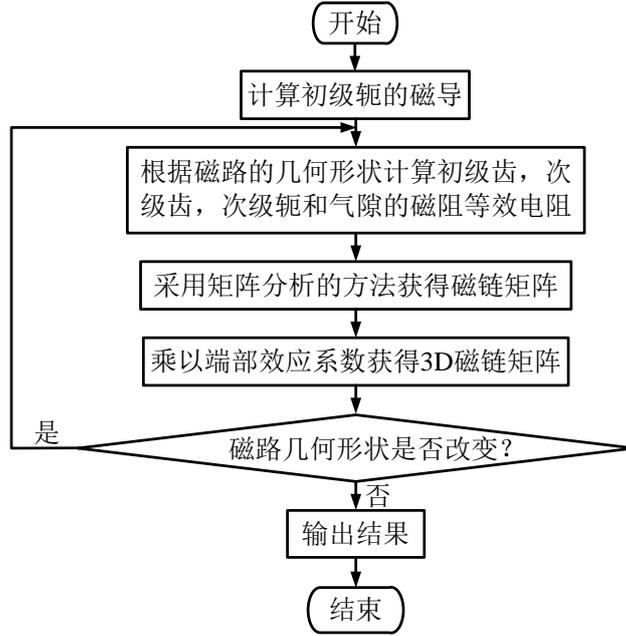


图 2-27 求解变结构磁网络模型的非线性方程流程图

尽管互感耦合 LSRM 模型中用到了六个等效磁网络模型, 但是因为每个时刻只对应一个磁网络结构, 因此每次只求解一个磁网络模型的节点方程组, 得到一个网络的节点数值解。根据电路理论, 可采用节点分析和高斯-赛德尔迭代的方法求解非线性矩阵, 直接得到节点电压和支路电流。系统矩阵公式如下所示:

$$\mathbf{R}_l \times \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{F}_l \quad (2.66)$$

式中, \mathbf{R}_l 为磁阻矩阵/ Ω ; $\boldsymbol{\Phi}$ 为磁通矩阵/Wb; \mathbf{F}_l 为磁动势矩阵/At。

进而得到二维磁链矩阵 λ_{2D} 如式(2.67)所示:

$$\lambda_{2D} = \mathbf{N} \times \boldsymbol{\Phi} \quad (2.67)$$

式中, \mathbf{N} 为以每相初级绕组匝数为对角元素的矩阵。

最终可得到电感矩阵 \mathbf{L} 如下式所示:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I}^{-1} \times \lambda_{3D} \quad (2.68)$$

式中, \mathbf{I} 为以每相初级绕组电流为对角元素的相电流矩阵/A。

5. 互感耦合直线开关磁阻发电机的电磁场分析与验证

三维有限元分析 (3D-FEA) 是分析具有复杂磁结构和非线性磁特性的电磁设备的有力工具, 在许多工业领域中都有着非常广泛的应用, 如航天航空、生物力学和汽车制造行业等, 它在三维空间范围内提高了模型的计算精度, 增强了设计方案的可行性, 更好的预见设计关键参数对系统性能的影响。对于本文所涉及的互感耦合 LSRM 的横向边缘效应和纵向边缘效应, 3D-FEA 是非常合适的分析方法, 但是由于三维计算耗时较长, 这里只将其作为验证线性磁路模型和变结构磁网络模型有效性的可靠工具。本小节采用三维静态磁场的有限元

分析方法对互感耦合 LSRM 的磁场分布和磁链特性进行计算，并用其仿真结果和两种数值仿真模型的仿真结果进行对比，以此来验证两种数值仿真模型对互感耦合 LSRM 的磁饱和效应、互感耦合和边缘效应的仿真性能。有限元的三维模型如图 2-26 所示。

在 3D-FEA 中，磁场求解器采用了如下的关系式计算磁通 Φ ：

$$\Phi = \int B \cdot dA \quad (2.69)$$

式中， B 为磁通密度/T， A 表示在笛卡尔坐标系下磁力线沿着 xy 平面扫描的面积/ m^2 。

图 2-28 给出了线性磁路模型、变结构磁网络模型和 3D-FEA 模型在励磁电流为 2A 情况下，对三相绕组间互感仿真结果的比较。

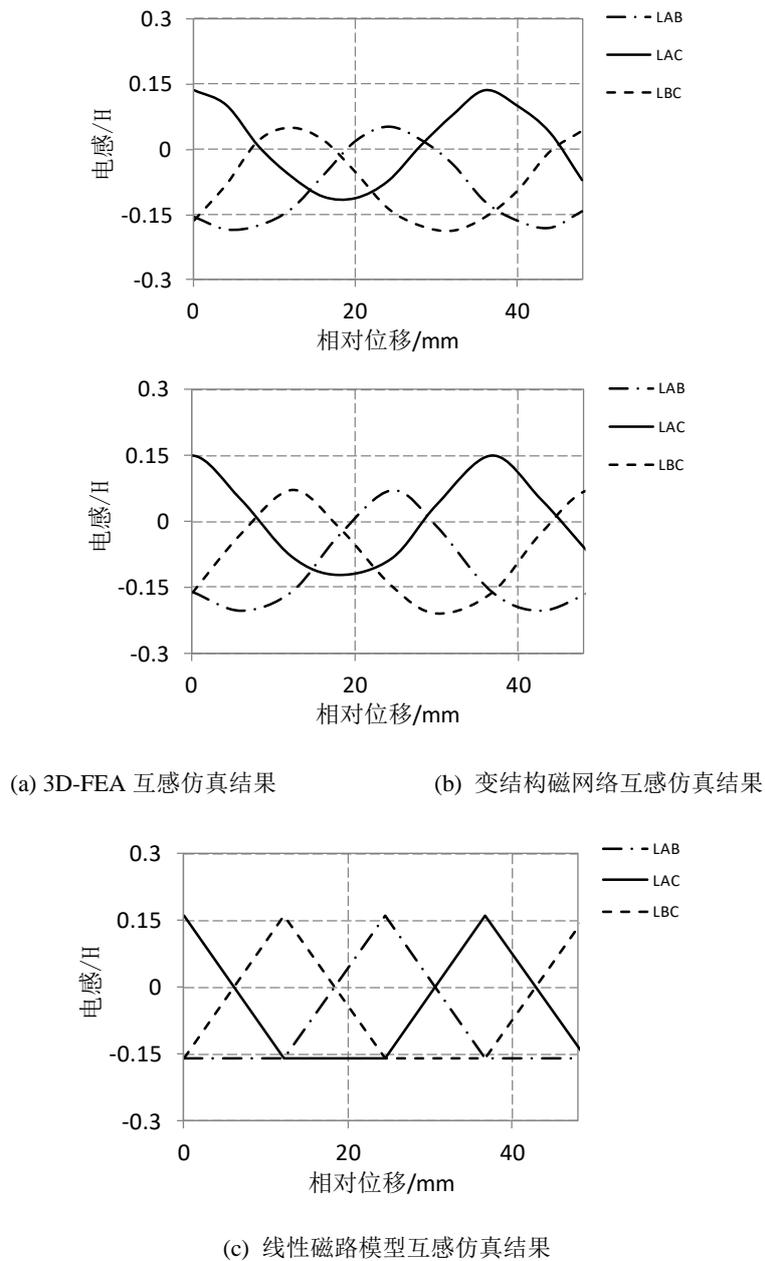
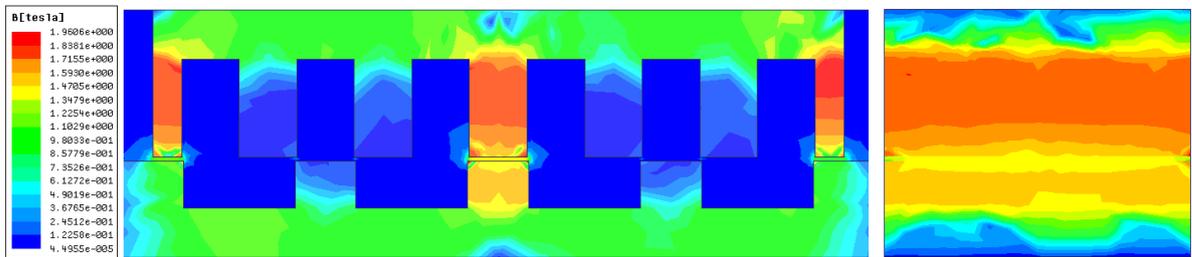


图 2-28 三维有限元模型和数值模型互感和自感仿真结果比较

从比较结果可以看出，变结构磁网络模型和 3D-FEA 模型得出的三相间互感因为磁路

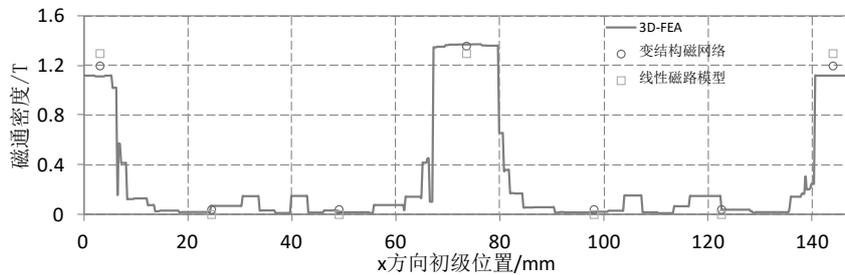
自然开端的原因而不平衡,而线性磁路模型因为没有考虑到磁路开断的影响而得到了三相互感对称的结果。另外,由仿真结果可以看出变结构磁网络模型和 3D-FEA 模型计算出来的结果吻合程度较高,而线性磁路模型和 3D-FEA 模型计算出来的结果随时间变化的周期性一致,变化率稍有区别。

图 2-29 给出了 AC 相绕组单极性励磁情况下,在励磁初级齿和次级齿对齐位置,数值模型和三维有限元模型对磁密仿真的比较结果。对于线性磁路模型,只有 6 个向量可以通过求解得出,而在端部齿下磁密对称相等的假设下,可以得到对应于 7 个初级齿的气隙磁密;同理,根据图 2-22(a)所示的变结构磁网络模型,每个位置对应一个磁网络结构,而每个磁网络结构中只有 7 个对应于流气隙磁阻的节点电流值可以求解得出。因此可以看到相比于三维有限元分析软件得到的一条连续的气隙磁密分布曲线,数值解只有几个点状分布的值能与之相比。尽管如此,仍然可以看出数值解和有限元解较好的吻合程度。线性磁路模型中因为没有考虑到端部绕组的磁场情况,而比 3D-FEA 仿真结果的气隙磁密稍低,而且在中间对齐齿和端部对齐齿的气隙磁密相等;而变结构磁网络模型的计算值与 3D-FEA 的结果非常接近,在中间对齐齿和端部对齐齿的气隙磁密因为边缘效应的影响都出现了不同程度的不相等情况。

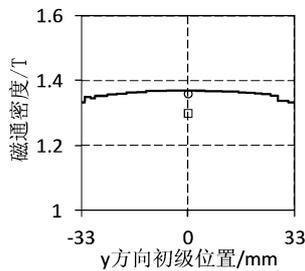


(a) x 方向气隙磁密分布 (3D-FEA)

(b) y 方向气隙磁密分布 (3D-FEA)



(c) x 方向气隙磁密比较



(d) y 方向气隙磁密比较

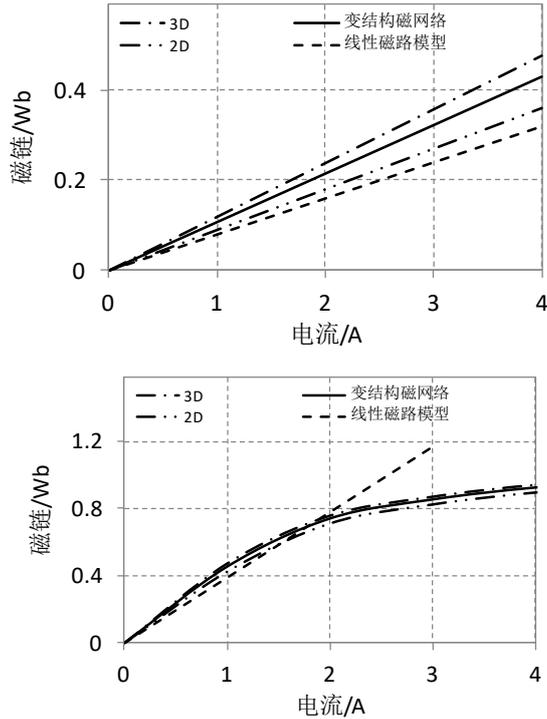
图 2-29 三维有限元分析和数值模型磁密分布仿真结果比较

图 2-30 给出了在 AC 相绕组单极性励磁情况下,在励磁初级齿和次级齿不对齐和对齐位置三维有限元模型和数值模型磁链变化曲线仿真结果的对比情况。为了更好的理解边缘效应的影响,这里也加入了二维有限元分析的计算结果。

经过图 2-30 的比较有如下结论：

(1) 在励磁初级齿和次级齿对齐位置，三维有限元、二维有限元以及变结构磁网络模型对磁链变化的计算结果误差很小，而线性磁路模型因为没有考虑到磁路饱和和开断的影响，在不饱和的线性区域和前三者的计算结果比较接近，但在饱和的非线性区域误差越来越大，因此在不饱和情况下，线性磁路模型可以作为快速仿真和建模的依据和标准，但是在非线性区域线性磁路模型无法准确描述电机的基本特性。

(2) 在励磁初级齿和次级齿不对齐位置，由于端部绕组的磁场作用较大，而使四种情况下的磁链计算误差随着励磁电流的增大逐渐增大。



(a) 不对齐位置磁链比较

(b) 对齐位置磁链比较

图 2-30 三维有限元模型和数值模型在不对齐和对齐位置磁链变化曲线仿真结果比较

为了更清楚地比较线性磁路模型和变结构磁网络模型对磁链特性的描述情况，表 2-2 量化地给出了在线性区域和非线性区域，两种数学模型和 3D-FEA 的磁链计算结果的比较。

表 2-2 AC 相绕组单极性励磁情况下磁链计算结果比较

相对位置 x/mm	电流 I/A	3D-FEA 磁链值/Wb	线性磁路模型		变结构磁网络模型	
			磁链值/Wb	误差%	磁链值/Wb	误差%
0	1	0.47	0.4	13	0.45	4.2
	2	0.76	0.78	2.6	0.74	5.1
	3	0.87	1.17	34.5	0.85	2.3
	4	0.94	1.56	65.9	0.92	2.1
18	1	0.12	0.10	10.2	0.11	8.3

2	0.24	0.17	30	0.21	12.5
3	0.36	0.26	27.7	0.32	11
4	0.48	0.36	25	0.43	10.4

比较表 2-2 的计算结果可以看出：

(1) 无论是在励磁初级齿和次级齿对齐位置 ($x=0\text{mm}$) 还是在不对齐位置 ($x=18\text{mm}$)，在不饱和的线性区域 ($I \leq 2\text{A}$)，线性磁路模型和变结构磁网络模型的磁链计算结果和 3D-FEA 的磁链计算结果的误差都在 13% 以内；

(2) 在饱和的非线性区域 ($I > 2\text{A}$)，线性磁路模型的计算误差较大，而变结构磁网络模型的计算结果在 13% 以内。

本文在饱和情况下采用变结构磁网络模型，在不饱和情况下为了加快计算速度而采用线性磁路模型，因此无论是在饱和情况下，还是在饱和情况下本文采用的数学模型都是正确可行的。

图 2-31 描述了磁路不饱和时 AC 相绕组单极性励磁的情况下，三维有限元模型和数值模型对初级绕组有效磁链随相对位移变化情况的仿真结果比较。

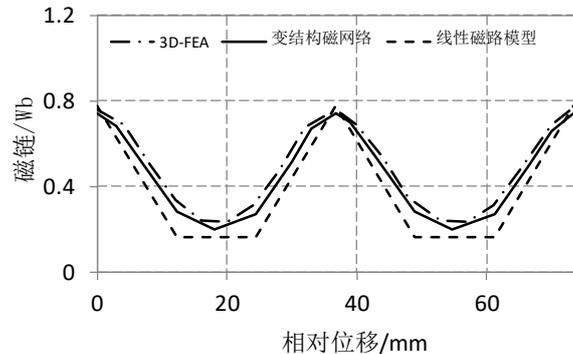


图 2-31 三维有限元模型和数值模型中磁链随转子位置变化曲线仿真结果比较

经过比较可以看出，在线性磁路模型中，由于端部绕组磁场的影响，在励磁初级齿和次级齿不对齐的位置，磁链计算误差相对较大，而随着励磁初级齿和次级齿对齐程度的增大，误差逐渐减小，在完全对齐位置，磁链计算结果几乎同三维有限元仿真结果一致。而变结构磁网络模型对于磁链特性的计算和 3D-FEA 计算的结果在各个位置情况下都误差较小，说明变结构磁网络模型具有较高的计算精度。

2.3.2 磁通反向电机(FRM)的变网络等效磁路模型

磁通反向电机的截面图如图 2-32 所示。从定、转子极磁场分布可知，来自一个定子极的磁通可能进入两个相邻的转子极，并且随着转子位置角的改变，定、转子极间的气隙磁通路径将随之发生改变。这样，FRM 需要建立一个随转子位置角 θ 不同，定、转子极间气隙等效磁路相应改变的变网络等效磁路模型，如图 2-33 所示。

图 2-33 所示的磁网络各支路中，除气隙磁通支路外，其余部分是通用的支路，任一转子位置下定子绕组都有两相同时导通，但在确定的位置还需判断是哪两相绕组导通。图中， G_{cs} 、 G_{ps} 、 G_{cr} 和 G_{pr} 分别是定子轭、定子齿、转子轭和转子齿部磁导，它们都是相应磁路中磁密的非线性函数； G_{pc1} 、 G_{pl} 、 G_{pm} 和 G_{pm1} 分别是定子极与轭之间的漏磁导、定子极与极之

间的漏磁导、永磁体磁导和永磁体侧漏磁导，它们均式线性磁导，磁导率是常数； G_A 和 G_{pm2} 分别是定子各齿表面和转子各齿表面之间的气隙磁导、同一定子极上两相邻永磁体之间的漏磁导，它们是参数非线性磁导，是转子位置角 θ 的函数； F_{pm} 为等效永磁体磁动势源； $F_k=N_c I_k$ ($k=A, B, C$)为定子绕组等效磁动势源，其大小和方向由绕组内电流情况决定， N_c 为定子集中绕组的匝数， I_k 为第 k 相的相电流。



图 2-32 6/8 极 FRM 截面图

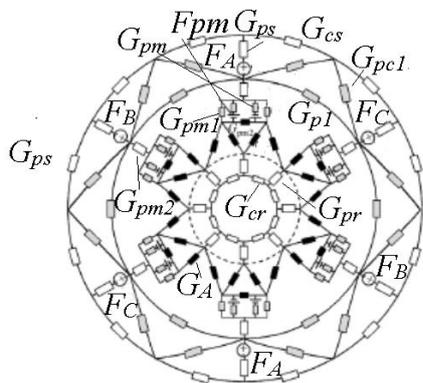


图 2-33 6/8 极 FRM 磁网络结构 ($\theta=0^\circ$)

FRM的定、转子间气隙可以看作是极距不等的双开槽结构，使用分割法来推导气隙磁导公式时有以下假设：①铁心磁导率无穷大，磁力线垂直于铁心表明；②磁场沿轴向均匀分布。

由于定、转子极间气隙磁通路径随转子位置的不同而变，根据定转子相对位置的不同，将1个转子极距划分为可能的10个区间，它们由 $\alpha_1 \sim \alpha_{10}$ 来定义，即

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{区间1: } 0 \leq \alpha < \alpha_1 \\ \text{区间2: } \alpha_1 \leq \alpha < \alpha_2 \\ \quad \quad \quad \vdots \\ \text{区间10: } \alpha_9 \leq \alpha < \alpha_{10} \end{array} \right. \quad (2.70)$$

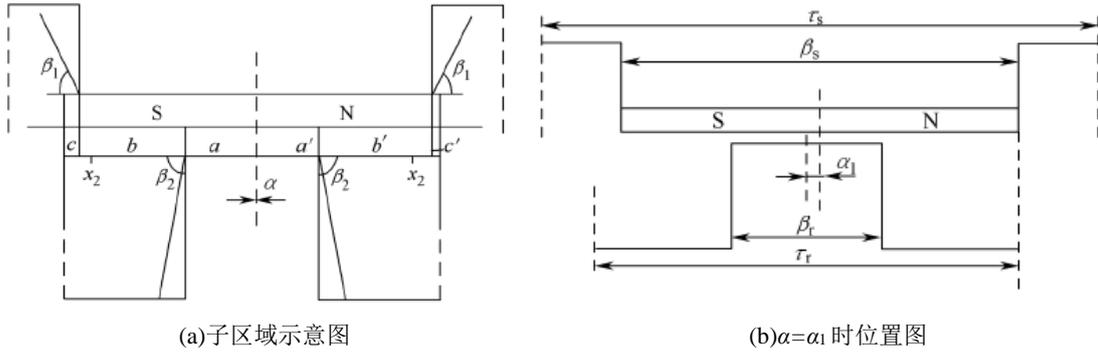


图 2-34 区间 1

图 2-34中, $\alpha_1 = \frac{(\tau_r - \beta_s)}{2}$ τ_r β_s 为用弧度表示的转子极距和定子极弧

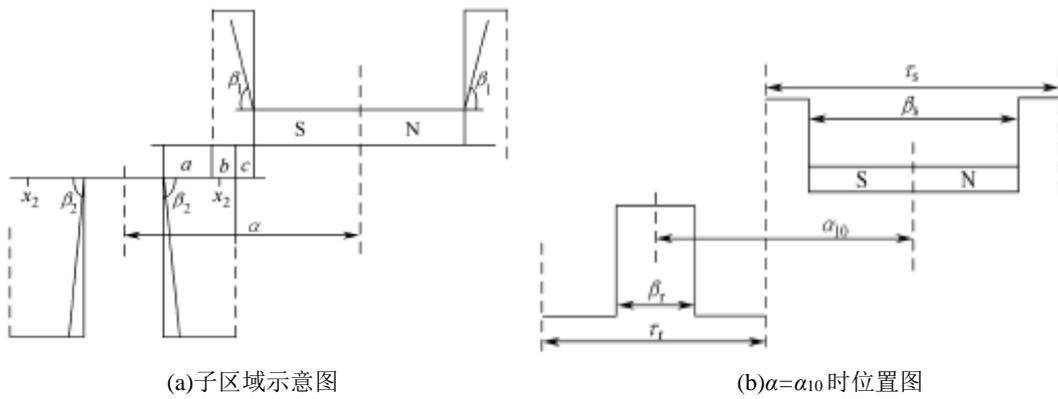


图 2-35 区间 10

根据磁通分布情况, 将每个区间再分为若干个子区域, 使每个子区域内的磁场量近似恒定, 这样每个子区域可用1个磁通管来表示。例如区间1被划分为 $a \sim c$ 、 $a' \sim c'$ 六个子区域, 如图 2-34所示, 使每个子区域的宽度为

$$\begin{aligned}
 a &= \left(\frac{1}{2}\beta_r + \alpha\right)R_{si} \\
 b &= \frac{1}{2}\beta_r R_{si} - \alpha \\
 c &= \frac{1}{2}(\tau_r - \beta_r)R_{si} - b \\
 a' &= \beta_r R_{si} - \alpha \\
 b' &= \frac{1}{2}\beta_s R_{si} - a' \\
 c' &= \frac{1}{2}(\tau_r - \beta_r)R_{si} - b'
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

其中, R_{si} 是用弧度表示的定子内半径。

为了能够用圆弧和直线来等效实际磁力线, 并保证等效前后磁位降保持不变, 将定子极和转子极的侧面边界分别倾斜 β_1 和 β_2 角(见图3)。它们可由下列经验公式确定

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta_s}{2} \\ \beta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta_r}{2} \end{cases} \quad (2.72)$$

对应的定、转子极磁力线的分界点

$$\begin{cases} x_1 = \frac{h_{ps}}{\beta_1} \\ x_2 = \frac{h_{pr}}{\beta_2} \end{cases} \quad (2.73)$$

其中, h_{ps} 和 h_{pr} 分别为定、转子极高。

每个磁通管的气隙比磁导可按式计算

$$p = \mu_0 \frac{A_m}{l_m} \quad (2.74)$$

其中, A_m 和 l_m 分别为磁通管宽和相应磁力线的长度, μ_0 为空气磁导率。

以区间1为例说明气隙磁导计算公式

在子区间a中, 磁力线长度保持不变, 气隙比磁导为

$$P_{Aa} = \frac{\mu_0 a}{g_0} \quad (2.75)$$

其中, g_0 为气隙长度。

在子区域b内, 磁力线由直线和圆弧组成, 气隙比磁导为

$$\begin{cases} P_{Ab} = \int_0^b \frac{\mu_0 dx}{g_0 + \beta_2 x} = \frac{\mu_0}{\beta_2} \ln\left[1 + \frac{\beta_2 b}{g_0}\right] & x_2 \geq b \\ P_{Ab} = \int_0^{x_2} \frac{\mu_0 dx}{g_0 + \beta_2 x} + \frac{\mu_0(b-x_2)}{g_0 + h_{pr}} = \frac{\mu_0}{\beta_2} \ln\left[1 + \frac{\beta_2 x_2}{g_0}\right] + \frac{\mu_0(b-x_2)}{g_0 + h_{pr}} & x_2 < b \end{cases} \quad (2.76)$$

在子区域c内, 磁力线由直线和圆弧组成, 气隙比磁导为

$$\begin{cases} P_{Ac} = \int_0^c \frac{\mu_0 dx}{g_0 + h_{pm} + h_{rp} + \beta_1 x} = \frac{\mu_0}{\beta_1} \ln\left[1 + \frac{\beta_1 c}{g_0 + h_{pm} + h_{rp}}\right] & x_2 < b \\ P_{Ac} = \int_0^c \frac{\mu_0 dx}{g_0 + h_{pm} + \beta_1 x + \beta_2(x+b)} = \frac{\mu_0}{\beta_1 + \beta_2} \ln\left[1 + \frac{(\beta_1 + \beta_2)c}{g_0 + h_{pm} + \beta_2 b}\right] & x_2 \geq b + c \\ P_{Ac} = \int_0^{x_2-b} \frac{\mu_0 dx}{g_0 + h_{pm} + \beta_1 x + \beta_2(x+b)} + \int_{x_2-b}^c \frac{\mu_0 dx}{g_0 + h_{pm} + h_{pr} + \beta_1 x} \\ = \frac{\mu_0}{\beta_1 + \beta_2} \ln\left[1 + \frac{(\beta_1 + \beta_2)(x_2-b)}{g_0 + h_{pm} + \beta_2 b}\right] + \frac{\mu_0}{\beta_1} \ln\left[1 + \frac{\beta_1(c-x_2+b)}{g_0 + h_{pm} + h_{pr}}\right] & b \leq x_2 < b + c \end{cases} \quad (2.77)$$

转子极对定子上S极的总的气隙比磁导为

$$P_{AS}(\alpha) = P_{Aa} + P_{Ab} + P_{Ac} \quad (2.78)$$

同理可得转子极对定子上N极的总的气隙比磁导

$$P_{Aa}' = \frac{\mu_0 a'}{g_0} \quad (2.79)$$

在子区域 b' 内, 磁力线由直线和圆弧组成, 气隙比磁导为

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{Ab'} = \int_0^{b'} \frac{\mu_0 dx}{g_0 + \beta_2 x} = \frac{\mu_0}{\beta_2} \ln \left[1 + \frac{\beta_2 b'}{g_0} \right] \quad x_2 \geq b' \\ P_{Ab'} = \int_0^{x_2} \frac{\mu_0 dx}{g_0 + \beta_2 x} + \frac{\mu_0 (b' - x_2)}{g_0 + h_{pr}} = \frac{\mu_0}{\beta_2} \ln \left[1 + \frac{\beta_2 x_2}{g_0} \right] + \frac{\mu_0 (b' - x_2)}{g_0 + h_{pr}} \quad x_2 < b' \end{array} \right. \quad (2.80)$$

在子区域 c' 内, 磁力线由直线和圆弧组成, 气隙比磁导为

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{Ac'} = \int_0^{c'} \frac{\mu_0 dx}{g_0 + h_{pm} + h_{rp} + \beta_1 x} = \frac{\mu_0}{\beta_1} \ln \left[1 + \frac{\beta_1 c'}{g_0 + h_{pm} + h_{pr}} \right] \quad x_2 < b' \\ P_{Ac'} = \int_0^{c'} \frac{\mu_0 dx}{g_0 + h_{pm} + \beta_1 x + \beta_2 (x + b')} = \frac{\mu_0}{\beta_1 + \beta_2} \ln \left[1 + \frac{(\beta_1 + \beta_2) c'}{g_0 + h_{pm} + \beta_2 b'} \right] \quad x_2 \geq b' + c' \\ P_{Ac'} = \int_0^{x_2 - b'} \frac{\mu_0 dx}{g_0 + h_{pm} + \beta_1 x + \beta_2 (x + b')} + \int_{x_2 - b'}^{c'} \frac{\mu_0 dx}{g_0 + h_{pm} + h_{pr} + \beta_1 x} \\ = \frac{\mu_0}{\beta_1 + \beta_2} \ln \left[1 + \frac{(\beta_1 + \beta_2)(x_2 - b')}{g_0 + h_{pm} + \beta_2 b'} \right] + \frac{\mu_0}{\beta_1} \ln \left[1 + \frac{\beta_1 (c' - x_2 + b')}{g_0 + h_{pm} + h_{pr}} \right] \quad b' \leq x_2 < b' + c' \end{array} \right. \quad (2.81)$$

转子极对定子上N极的总的气隙比磁导为

$$P_{AN}(\alpha) = P_{Aa}' + P_{Ab'} + P_{Ac'} \quad (2.82)$$

由比磁导可得磁导

$$G_A(\alpha) = [P_{AS}(\alpha) + P_{AN}(\alpha)] l_a k_s \quad (2.83)$$

其中, l_a 为电机铁心计算长度, $l_a = l_{ef} + 2g_0$, l_{ef} 为电机铁心实际长度, k_s 为斜槽系数。

铁磁材料部分的磁导, 可根据各段磁路几何尺寸得到, 但磁导率不是常数, 需经迭代计算来确定。开始时取铁磁材料磁化曲线线性部分的磁导率代入计算, 再由解得的各段磁路的磁通和磁路截面积计算相应段磁路的磁密, 查磁化曲线得到新的磁导率。重复这一过程, 直至两次迭代所得结果的误差小于给定值为止。

在FRM的等效磁网络中, 气隙磁通支路数随转子位置而变, 但磁动势节点数保持不变, 因此用节点磁动势法建立FRM的磁网络方程, 并用广义多变量阻尼法求解得出各节点磁位值, 即可知道绕组磁通的变化规律, 从而可进行有关电磁参数及性能的计算。将电机转子在一个转子极距 ($0 \sim 45^\circ$) 范围内以一定的步长旋转, 每转动一步, 重新建立和求解网络方程, 得到一个周期内各支路的磁链、磁通、磁通密度和磁动势, 进而可求得FRM的电感参数和稳态特性。

1. 绕组磁链

由等效磁网络的解, 可以按照下式求得每极绕组的平均磁通

$$\Phi(\theta, i) = \frac{1}{2} [\Phi(17) + \Phi(24)] \quad (2.84)$$

其中, $\Phi(17)$ 和 $\Phi(24)$ 分别是定子极身和极靴对应磁路的磁通。

每极绕组的磁链

$$\psi'(\theta, i) = N_c \frac{1}{2} [\Phi(17) + \Phi(24)] \quad (2.85)$$

一相绕组的磁链则为

$$\psi(\theta, i) = 2N_c \frac{1}{2} [\Phi(17) + \Phi(24)] \quad (2.86)$$

图 2-36a为按上述方法得到的6/8极FRM相绕组空载磁链曲线，图 2-36b给出了有限元法相应的分析结果，由图可知，两种方法分析的结果基本吻合。

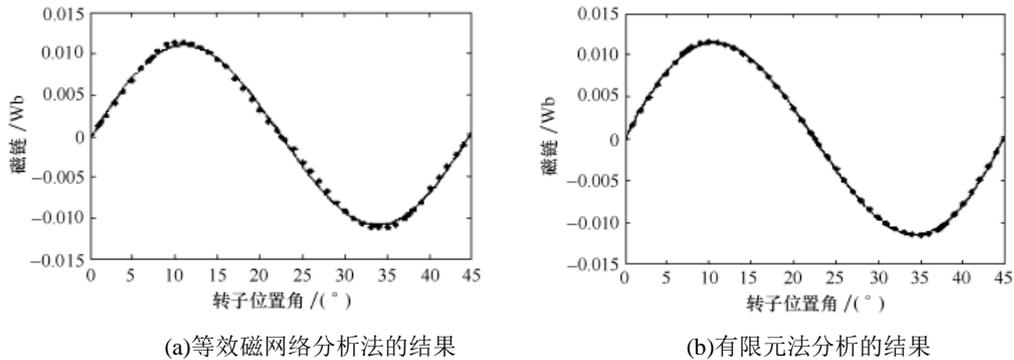


图 2-36 6/8 极 FRM 相绕组空载磁链曲线

2. 空载感应电动势

由绕组磁链特性，通过计算机仿真不难得到FRM在一定转速 n 下的控制感应电动势波形。具体方法是：空载时相当于绕组电流 i 为0，通过等效磁网络分析求解，得到随转子位置近似正弦变化的绕组磁链曲线，将其对转子位置角 θ 求导，并忽略幅值较小的高次谐波，乘以转子机械角速度，就可以得到相绕组感应电动势波形 $e=f(\theta)$ ，也即空载相电压波形。

感应电动势

$$e = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\psi}{d\theta} \frac{2\pi n}{60} \quad (2.87)$$

图 2-37给出了转速 $n=1590\text{rpm}$ 时空载相感应电动势理论波形和实验波形的比较。

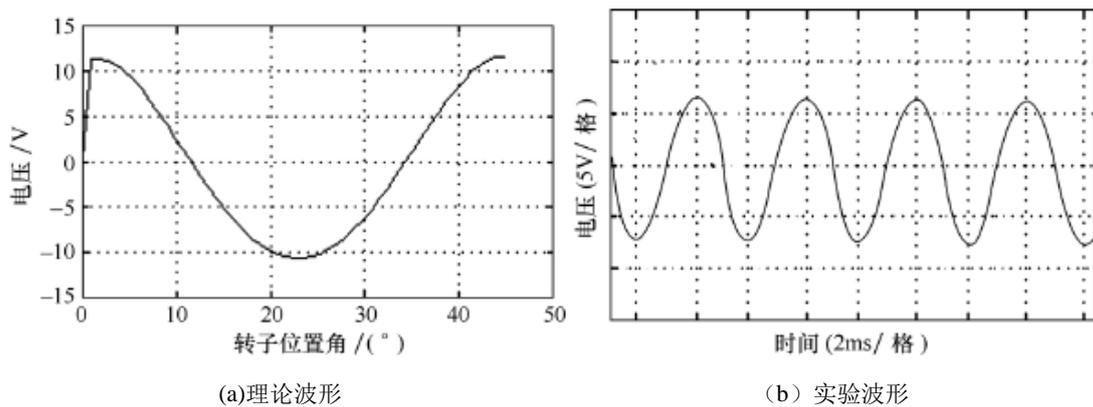


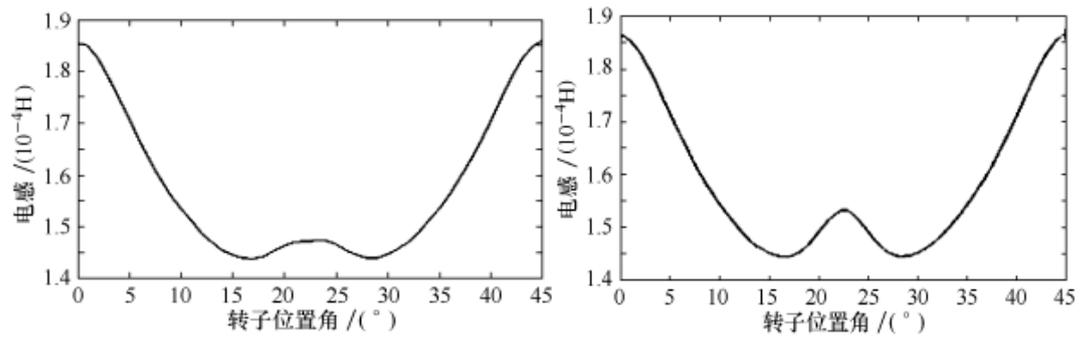
图 2-37 空载相感应电动势波形

求取电感 L 的值

$$L = \frac{\Delta\psi}{\Delta i} \quad (2.88)$$

为了求出绕组的电感值，必须赋予绕组一定的电流值，取电流值为0.01A，根据磁链的变化可以求出相应的电感，如图 2-38所示。由图中等效磁网络法和有限元法分析结果的比

较可以看出，两种分析方法所得结果基本吻合。



(a)等效磁网络法分析的结果

(b)有限元法分析的结果

图 2-38 电感波形

[Equation Section \(Next\)](#)

3 电磁器件分析方法——有限元法

电磁场数值分析主要采用有限元法，边界元法，有限差分法。其中，有限元法最有效，因而目前应用最广泛的有限元法。有限元法是根据变分原理和离散化而求解近似解的方法。电磁器件中的电磁场问题一般归结为一个偏微分方程的边界问题，但是有限元法不是直接以它为对象去求解，而是首先从偏微分方程边值问题出发，找出一个称为能量泛函的积分式，令它在满足第一类边界条件的前提下取得极值，即构成条件变分问题。这个条件变分问题和偏微分方程边界问题等价的。有限元法便是以条件变分问题为对象来求解电磁场问题的。与此同时，将场的求解域剖分成有限个单元，在每一个单元内部，近似的认为任意点的求解函数是在单元中构造出合适的插值函数，然后把插值函数代入能量泛函的积分式，把泛函离散化为多元函数。根据极值原理，将能量函数对每一个自变量求偏导数，并令其等于零，便得到一个线性代数方程组或非线性方程组。最后对此方程组由第一类边界条件做修正并借助于电子计算机求解。

与其他电磁场数值分析方法相比，有限元法具有以下突出优点：

1) 处理第二类边界条件和内媒质边界条件非常方便，对于第二类齐次边界条件和不具有面电流密度的媒质条件可不作任何处理，对于有多种材料组成，内部具有较多媒质分解面的电磁场来说，有限元分析法非常实用。

2) 几何剖分灵活，适合解决电动机这类几何形状复杂的问题：

3) 可较好的处理非线性问题。

3.1 电磁场基础

3.1.1 麦克斯韦方程组

电磁器件的电磁场理论基于麦克斯韦方程。在导电媒质中，对于似稳电磁场，麦克斯韦方程可以化成扩散方程（即热传导方程）。如研究实心转子或导体中的涡流时可以从扩散方程出发求解；在非导电媒质中，或者可以忽略导体中的涡流时，麦克斯韦方程可以进一步化为泊松方程（有场源的区域）或拉普拉斯方程（无场源的区域）；研究气隙磁场，极间漏磁场或叠片铁芯内的磁场时，都可以从拉普拉斯方程或泊松方程去求解。

对于一般的时变场，微分方程的麦克斯韦方程组可写成

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.5)$$

式中:

\mathbf{E} 为电场强度 (V/m, 伏特/米); \mathbf{D} 为电通量密度 (C/m², 库仑/米²); \mathbf{H} 为磁场强度 (A/m, 安培/米); \mathbf{B} 为磁通量密度 (Wb/m², 韦伯/米²); \mathbf{J} 为电流密度 (A/m², 安培/米²); ρ 为电荷密度 (C/m³, 库仑/米³)。

式(2.1)~(2.5)中可选三个作为独立方程, 如式(2.1)~(2.3), 或式(2.1)(2.2)(2.5), 而其他方程均可从独立方程导出, 成为辅助方程或相关方程。

对于静态场, 场量不随时间变化, 式(2.3)和(2.4)保持不变, 而由式(2.1)(2.2)和(2.5)可得

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.6)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (2.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2.8)$$

本构关系描述了被考虑媒质的宏观性质。前面描述的五个麦克斯韦方程中只有三个是独立的, 因为方程数少于未知量个数, 所以三个独立方程是非定解的形式, 当场量间的本构关系确定后, 麦克斯韦方程组就变成了定解形式。对于简单媒质, 本构关系如下

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.11)$$

式中, 本构参数 ε 、 μ 和 σ 分别表示媒质的介电常数 (F/m)、磁导率 (H/m) 和电导率 (S/m)。对于各向异性媒质, 这些参数是张量; 对于各向同性媒质, 这些参数是标量。对于非均匀媒质, 它们是位置的函数; 对于均匀媒质, 它们不随位置变化。

3.1.2 标量磁位和矢量磁位

为了求解麦克斯韦方程组, 我们可以首先将包含两个场量的一阶微分方程化成只包含一个场量的二阶微分方程。在此, 我们分静电和静磁两种情形来讨论

1. 静电场的标量磁位

静电场由式(2.3)和(2.6)支配, 为满足式(2.6), 将电场 \mathbf{E} 表示成

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi \quad (2.12)$$

式中 φ 为标量磁位。

将式(2.12)代入式(2.3), 应用式(2.2)得到

$$-\nabla \cdot (\varepsilon \nabla \varphi) = \rho \quad (2.13)$$

则得到了 φ 的二阶微分方程, 即著名的泊松方程。

2. 静磁场的矢量磁位

静磁场由式(2.4)和式(2.7)支配, 为满足式(2.4), 将磁通量密度 \mathbf{B} 表示成

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.14)$$

式中 \mathbf{A} 为矢量磁位。

将式(2.14)代入式(2.7), 应用式(2.3)得到

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) = \mathbf{J} \quad (2.15)$$

此二阶微分方程没有唯一解，因此强加一个规范条件，对于静态场，此条件的一种自然选择为

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (2.16)$$

3.1.3 电磁场求解的边界条件

电磁场的分析和计算通常归结为求微分方程的解。其解唯一的辅助条件可分为两种：一种是边界条件；另一种是场的初始状态，称为初始条件。边界条件和初始条件合称为定解条件。目前，电机电磁场问题主要研究的是没有初始条件而只有边界条件的定解问题——边值问题。

边界条件通常有三种情况：

(1) 第一类边界条件：边界上的物理条件规定了物理量在边界 Γ 上的值

$$u|_{\Gamma} = f_1(\Gamma) \quad (2.17)$$

(2) 第二类边界条件：边界上的物理条件规定了物理量 u 的法向微商在边界上的值

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Gamma} = f_2(\Gamma) \quad (2.18)$$

(3) 第三类边界条件：边界上的物理条件规定了物理量 u 及其法向微商在边界上的某一线性关系

$$\left(\eta\mu + \beta \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{\Gamma} = f_3(\Gamma) \quad (2.19)$$

式中 η 、 β 为常数。

研究磁场问题时，一般用第一类和第二类边界条件。

【例 3.1】在两个媒质的边界面上（如媒质 1 和媒质 2），边界条件的数学表达式如下：对于电场有

$$\hat{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad (2.20)$$

$$\hat{n} \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = 0 \quad (2.21)$$

同样，对于磁场有

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0 \quad (2.22)$$

$$\hat{n} \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad (2.23)$$

其中， \hat{n} 是垂直于界面的单位矢量，由媒质 2 指向媒质 1。

【例 3.2】当媒质之一是理想导体时，如媒质 2 为铁，边界条件可简化为特殊形式，

$$\hat{n} \times \mathbf{E} = 0 \quad (2.24)$$

或

$$\hat{n} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.25)$$

对于图 3-1 所示的铁和空气的分界面，上式可进一步简化为 $H_t=0$ (图 a)， $B_n=0$ (图 b)。

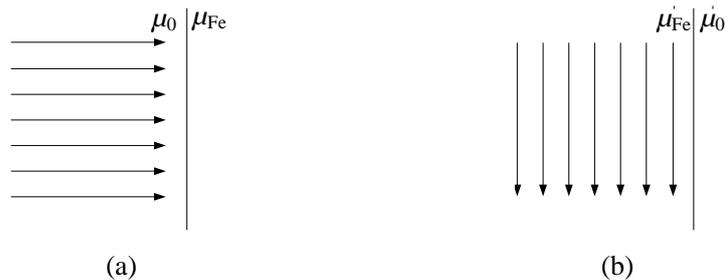


图 3-1 铁和空气的分界面边界条件

【例 3.3】当分界面为磁场的对称线时，如图 3-2 所示，边界条件可简化为 $H_t=0$ (图 a)， $B_n=0$ (图 b)。

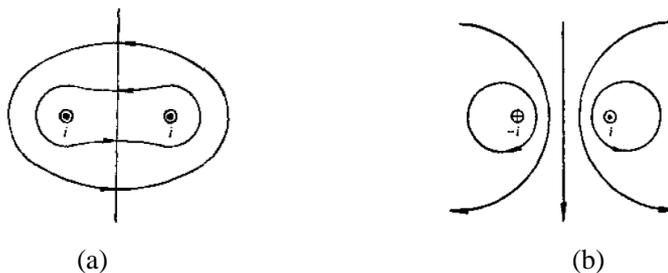


图 3-2 磁场对称线边界条件

3.1.4 有限元法的基本步骤

- (1)在必要的假设基础上，建立求解的数学模型。
- (2)给出与待求问题相应的泛函及其变分问题。
- (3)对求解区域进行剖分并在单元中构造出插值函数。
- (4)把变分问题离散化为一多元函数的极值问题导出一组联立的代数方程。
- (5)将一类及周期性边界条件代入，修改联立方程组。
- (6)选择适当的代数解法求解代数方程组，得出节点上的函数值。

【例 3-1】这里以图 3-4 中的槽中磁场的求解为例来说明有限元法实施的全部过程。

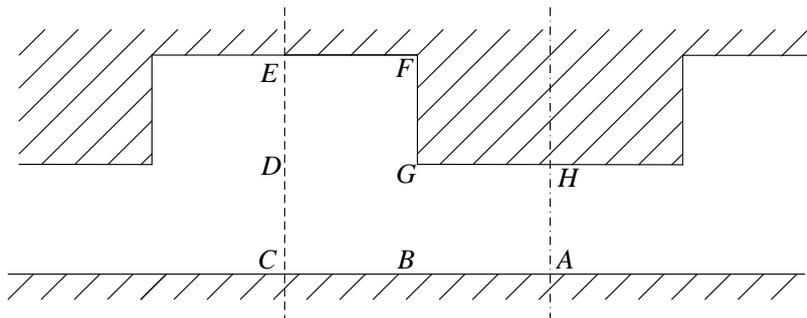


图 3-3 槽中磁场的求解

槽中电磁场呈轴对称分布，平面区域 ABCDEFGHA 为求解区域，由于区域中没有电流，磁场为无旋的，故此时可用标量磁位进行求解。

1. 数学模型

$$\begin{cases} \Omega: \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial y^2} = 0 \\ \Gamma_1: \varphi_m = \varphi_{m0} (\text{ABC、EFGH 上}) \\ \Gamma_2: \frac{\partial \varphi_m}{\partial n} = -\frac{B_0}{\mu} (\text{AH、CDE 上}) \end{cases} \quad (2.26)$$

2. 等价变分问题

$$\begin{cases} W(\varphi_m) = \iint_{\Omega} \frac{\mu}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_m}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \min \\ S_1: \varphi_m = \varphi_{m0} \end{cases} \quad (2.27)$$

3. 对求解区域进行剖分并在单元中构造出插值函数

有限元法的核心在于将连续的场域看成由有限多个小单元组成，而每个小单元中连续的磁位函数又可用该单元中离散点上的磁位来表示。采用最常用的三角形剖分与相应的三角形三顶点线性插值的方法。

(1) 单元剖分

将场域 ABCDEFGHA 剖分为有限个互不重叠的三角形单元，如图 3-4，剖分时要求任一三角形的顶点必须同时是相邻三角形的顶点，如图 3-5a，而不能是相邻三角形边上的点，如图 3-5b。

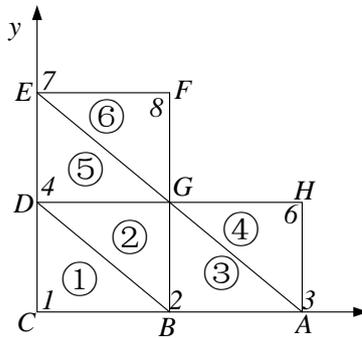


图 3-4 求解区域剖分



图 3-5 剖分三角形

实际中为保证计算精度，剖分要十分精细，三角形单元常达到几百到几千个，但并不是均匀分布。为了计算方便，这里取 5 个单元和 7 个节点，所有单元和节点分别加以编号，如图 3-4 所示。

(2) 构造磁位插值函数

设任意三角形单元 e 的三个顶点的节点按逆时针排列，其编号 i, j, m 相应的坐标为 (x_i, y_i) ， (x_j, y_j) ， (x_m, y_m) ，如图 3-6 所示，相应的磁位分别为 u_i, u_j, u_m 。若单元内各点的磁位 $u(x,y)$ 是 x, y 的线性函数，则有

$$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y \quad (2.28)$$

式中 a_1, a_2, a_3 为待定常数。

将节点坐标及其磁位分别代入式(2.28)得下列方程组

$$\begin{cases} a_1 + a_2x_i + a_3y_i = u_i \\ a_1 + a_2x_j + a_3y_j = u_j \\ a_1 + a_2x_m + a_3y_m = u_m \end{cases} \quad (2.29)$$

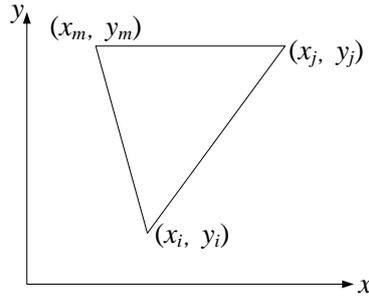


图 3-6 剖分单元 e

联立求解此方程组，即可确定常数如下

$$\begin{cases} a_1 = (a_i u_i + a_j u_j + a_m u_m) / 2\Delta \\ a_2 = (b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m) / 2\Delta \\ a_3 = (c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m) / 2\Delta \end{cases} \quad (2.30)$$

其中

$$\begin{cases} a_i = x_i y_m - x_m y_i & a_j = x_m y_j - x_j y_m & a_m = x_i y_j - x_j y_i \\ b_i = y_j - y_m & b_j = y_m - y_i & b_m = y_i - y_j \\ c_i = x_m - x_j & c_j = x_i - x_m & c_m = x_j - x_i \end{cases} \quad (2.31)$$

$$\text{三角形单元 } e \text{ 的面积 } \Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = \frac{1}{2} (b_i c_j - b_j c_i) \quad (2.32)$$

将式(2.30)代入式(2.28)，得任一单元 e 的磁位线性插值函数

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{2\Delta} [(a_i + b_i x + c_i y)u_i + (a_j + b_j x + c_j y)u_j + (a_m + b_m x + c_m y)u_m] \\ &= N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m = \sum_{k=i,j,m} N_k(x, y) u_k \end{aligned} \quad (2.33)$$

式中 $N_k(x, y)$ 称为三角形单元 e 上的线性插值的基函数或状函数。

$$N_k = \frac{1}{2\Delta} (a_h + b_h x + c_h y) \quad (h = i, j, m) \quad (2.34)$$

式(2.33)也可写为

$$u(x, y) = [N_i, N_j, N_m] \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

式(2.35)表明, 在单元上只要确定了三个顶点的磁位, 则 $u(x,y)$ 在单元内的磁位近似表达式就完全确定了。如果在每个单元都构造出 $u(x,y)$ 的近似表达式, 拼合起来就能得到 $u(x,y)$ 的总体近似函数。因为 $u(x,y)$ 在任意两个相邻单元的公共边及公共节点上函数值是连续的, 因此, 它取决于待求函数在各节点上的值 u_1, u_2, \dots, u_{L0} ($L0$ 为总节点数)。所以, 由式(2.33)可以得到

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta} (b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta} (c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m) \end{cases} \quad (2.36)$$

从上式可以看到, $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 都和 x, y 无关, 它们在一个三角形单元中为常数, 而 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和

$\frac{\partial u}{\partial y}$ 分别代表场量 \vec{B} 或 \vec{H} 的一个分量, 故 \mathbf{B} 和 \mathbf{H} 在一个三角形单元中也为一个常数。

4. 把变分问题离散化, 导出联立方程组

(1) 单元分析

将磁位函数 $u(x, y)$ 、式(2.35)及其一阶偏导数式(2.36)代入每一个单元的能量泛函公式之中, 则原来的泛函将近似地转化为以三个节点磁位为自变量的三元函数, 并计算它对三个节点的磁位的一阶偏导数, 上述步骤叫单元分析。

$$W_e[u(x, y)] = \iint_{\Delta} \frac{\beta}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (2.37)$$

其中

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta} (b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m) \quad (2.38)$$

因此

$$\begin{aligned} \iint_{\Delta} \frac{\beta}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx dy &= \frac{\beta}{8\Delta} (b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m)^2 \\ &= \frac{\beta}{8\Delta} [u_i, u_j, u_m] \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_m \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_m \\ b_m b_i & b_m b_j & b_m b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [u]_e^T [k_1]_e [u]_e \end{aligned} \quad (2.39)$$

同理可得

$$\iint_{\Delta} \frac{\beta}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dx dy = \frac{\beta}{8\Delta} (c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m)^2$$

$$= \frac{\beta}{8\Delta} [u_i, u_j, u_m] \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_m \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_m \\ c_m c_i & c_m c_j & c_m c_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [u]_e^T [k_2]_e [u]_e \quad (2.40)$$

$$W_e[u(x, y)] = \frac{1}{2} [u]_e^T [k_1]_e [u]_e + \frac{1}{2} [u]_e^T [k_2]_e [u]_e = \frac{1}{2} [u]_e^T [k]_e [u]_e \quad (2.41)$$

其中

$$[k]_e = [k_1]_e + [k_2]_e = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mm} \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

式(2.42)是一个三阶方阵，它是磁场能的离散矩阵，故又称为单元磁场系数矩阵，简称单元系数矩阵，其元素一般表达式为

$$k_{rs} = k_{sr} = \frac{\beta}{4\Delta} (b_r b_s + c_r c_s) \quad (r = i, j, m; s = i, j, m) \quad (2.43)$$

即

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{ii} = \frac{\beta}{4\Delta} (b_i^2 + c_i^2) \\ k_{jj} = \frac{\beta}{4\Delta} (b_j^2 + c_j^2) \\ k_{mm} = \frac{\beta}{4\Delta} (b_m^2 + c_m^2) \\ k_{ij} = k_{ji} = \frac{\beta}{4\Delta} (b_i b_j + c_i c_j) \\ k_{jm} = k_{mj} = \frac{\beta}{4\Delta} (b_j b_m + c_j c_m) \\ k_{mi} = k_{im} = \frac{\beta}{4\Delta} (b_m b_i + c_m c_i) \end{array} \right. \quad (2.44)$$

为了导出单元节点磁位的线性方程，只要分别计算式(2.41)(它是三个节点磁位为自变量的三元函数)对三个节点的磁位的一阶偏导数，得到

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial W_e}{\partial u_i} \\ \frac{\partial W_e}{\partial u_j} \\ \frac{\partial W_e}{\partial u_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{jm} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{bmatrix} = [k]_e [u]_e \quad (2.45)$$

(2) 总体合成

在一个求解区域中，将其中所有的单元分析组合起来。就可得到整个区域的联立线性方程组。为说明总体合成的程，以图 3-4 所示的例子，进行具体的研究。设剖分的总单元数

为 E_0 ，总节点数为 L_0 ，本例 $E_0=6$ ， $L_0=8$ 。按顺序分析单元①、②、...、⑥，可得单元①的分析结果为

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial W_1}{\partial u_1} \\ \frac{\partial W_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial W_1}{\partial u_3} \\ \frac{\partial W_1}{\partial u_4} \\ \frac{\partial W_1}{\partial u_5} \\ \frac{\partial W_1}{\partial u_6} \\ \frac{\partial W_1}{\partial u_7} \\ \frac{\partial W_1}{\partial u_8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & k_{14}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^1 & 0 & k_{24}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{41}^1 & k_{42}^1 & 0 & k_{44}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

因节点 3、5、6、7、8 皆与单元①无关，故

$$\frac{\partial W_1}{\partial u_3} = \frac{\partial W_1}{\partial u_5} = \frac{\partial W_1}{\partial u_6} = \frac{\partial W_1}{\partial u_7} = \frac{\partial W_1}{\partial u_8} = 0$$

单元②的分析结果为

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial W_2}{\partial u_1} \\ \frac{\partial W_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial W_2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial W_2}{\partial u_4} \\ \frac{\partial W_2}{\partial u_5} \\ \frac{\partial W_2}{\partial u_6} \\ \frac{\partial W_2}{\partial u_7} \\ \frac{\partial W_2}{\partial u_8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22}^2 & 0 & k_{24}^2 & k_{25}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{42}^2 & 0 & k_{44}^2 & k_{45}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{52}^2 & 0 & k_{54}^2 & k_{55}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

其中

$$\frac{\partial W_2}{\partial u_1} = \frac{\partial W_2}{\partial u_3} = \frac{\partial W_2}{\partial u_6} = \frac{\partial W_2}{\partial u_7} = \frac{\partial W_2}{\partial u_8} = 0$$

有关其余各单元的分析结果，此处从略。将六个单元的分析结果的左端和右端分别迭加起来可得到总体的合成结果如下

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial W}{\partial u_1} \\ \frac{\partial W}{\partial u_2} \\ \frac{\partial W}{\partial u_3} \\ \frac{\partial W}{\partial u_4} \\ \frac{\partial W}{\partial u_5} \\ \frac{\partial W}{\partial u_6} \\ \frac{\partial W}{\partial u_7} \\ \frac{\partial W}{\partial u_8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial W_1}{\partial u_1} \\ \frac{\partial(W_1+W_2+W_3)}{\partial u_2} \\ \frac{\partial(W_3+W_4)}{\partial u_3} \\ \frac{\partial(W_1+W_2+W_5)}{\partial u_4} \\ \frac{\partial(W_2+W_3+W_4+W_5+W_6)}{\partial u_5} \\ \frac{\partial W_4}{\partial u_6} \\ \frac{\partial(W_6+W_8)}{\partial u_7} \\ \frac{\partial W_6}{\partial u_8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^1 & k_{12}^1 & 0 & k_{14}^1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21}^1 & k_{22}^{1+2+3} & k_{23}^2 & k_{24}^{1+2} & k_{25}^{2+3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{32}^2 & k_{33}^{3+4} & 0 & k_{35}^{3+4} & k_{36}^4 & 0 & 0 \\ k_{41}^1 & k_{42}^{1+2} & 0 & k_{44}^{1+2+5} & k_{45}^{2+5} & 0 & k_{47}^5 & 0 \\ 0 & k_{52}^{2+3} & k_{53}^{3+4} & k_{54}^{2+5} & k_{55}^{2+3+4+5+6} & k_{56}^4 & k_{57}^{5+6} & k_{58}^6 \\ 0 & 0 & k_{63}^4 & 0 & k_{65}^4 & k_{66}^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_{74}^5 & k_{75}^{7+8} & 0 & k_{77}^{5+6} & k_{78}^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k_{85}^6 & 0 & k_{87}^6 & k_{88}^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

其中

$$W = \sum_{e=1}^6 W_e \quad (2.49)$$

式(2.49)中某一个元素 k_{ij}^e 为每个单元对 $[k]$ 中某一元素 k_{ij} 的贡献。写成矩阵的形式为

$$\left[\frac{\partial W}{\partial u} \right] = [k][u] \quad (2.50)$$

当 W 取极值时，有 $\frac{\partial W}{\partial u} = 0$ ， $(1, 2, \dots, L_0)$ ，则

$$[k][u] = 0 \quad (2.51)$$

其中[k]为总的系数矩阵，[u]称为解向量。

5. 按一类边界条件修改联立方程组并进行求解

在图 3-4 中，若 AH 和 CE 皆为等 A_z 线，设 $A_z|_{CE} = 0$, $A_z|_{AH} = 1000$, 如用 u 代替 A_z , 则在第一类边界上，有下列的节点磁位是已知的，即 $u_1 = u_4 = u_7 = 0$, 和 $u_3 = u_6 = 1000$ 。因此不能将 W 对这些节点的磁位 u 求偏导数。于是在式(2.48)联立方程组中，应当扣除第 1、3、4、6、7 等五个方程。这样，只剩下第 2、5、8 三个方程了。在这些方程左端中， u_1, u_3, u_4, u_5, u_7 等皆为已知数，故应当把它们有关的项移到方程的右端，作为已知量看待。

$$\begin{cases} k_{22}u_2 + k_{25}u_5 = -(k_{21}u_1 + k_{23}u_3 + k_{24}u_4) \\ k_{52}u_2 + k_{55}u_5 + k_{58}u_8 = -(k_{53}u_3 + k_{54}u_4 + k_{56}u_6 + k_{57}u_7) \\ k_{85}u_5 + k_{88}u_8 = -k_{87}u_7 \end{cases} \quad (2.52)$$

求解以上方程组，便可得到待求的节点磁位数值。在本例中，设 $\overline{HA} = \overline{GB} = \overline{DC} = 0.5\text{cm}$ ，其余长度皆为 1cm，则式(2.52)成为

$$\begin{cases} 2u_2 - 1.6u_5 = 200 \\ -1.6u_2 + 2.8u_3 - 0.4u_8 = 200 \\ -0.4u_5 + 0.8u_8 = 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

联立求解后，得

$$u_2 = 318.18, u_5 = 272.73, u_8 = 136.36$$

3.2 稳态有限元法

对于电机中的交变电磁场，由于其变化频率很低，电磁场的源点与场点间的距离比电磁波的波长小得多，因此位移电流可以忽略不计，属于似稳电磁场的范畴。

旋转电机内的电磁场，从它的分布区域及其作用来看，大致可以分为：(1)气隙磁场(2)凸极电机磁极间的漏磁场(3)槽内漏磁场(4)绕组端部漏磁场(5)叠片铁心中的磁场(6)实心转子中的电磁场。按照是否随时间而变化，电机内的电磁场可分为：(1)恒定电磁场(2)时变电磁场。对于同步电动机而言，由于旋转磁场和转子严格同步，所以可以把任意时刻的主磁场(气隙磁场)看成是恒定磁场。但是电机定子槽内导体的涡流损耗、集肤效应等问题均属于时变电磁场问题。本节以圆筒型直线永磁电机和凸极同步电机为例，介绍二维稳态场的有限元计算方法。

3.2.1 圆筒型直线永磁电机的有限元分析

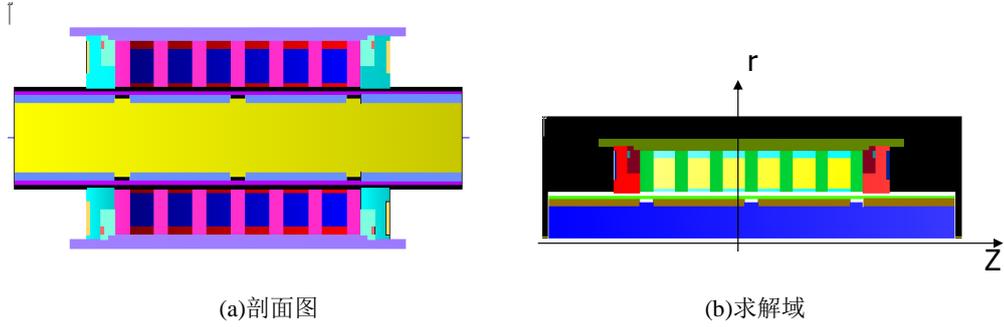


图 3-7 圆筒型直线永磁电机

圆筒型直线永磁电机的电磁场问题属于似稳场，而且是轴对称场，采用圆柱坐标系，如图 3-7 所示，矢量磁位 \mathbf{A} 是 r 和 z 的函数，即 $\mathbf{A}=\mathbf{A}(r, z)$ 。在永磁同步电动机的有限元分析过程中，忽略了定子导体内的时变电磁场问题，把问题全部归结为恒定电磁场问题。对于稳态情况，矢量磁位 \mathbf{A} 满足如下的准泊松方程边值问题：

1. 数学模型

$$\begin{cases} \Omega: \frac{\partial}{\partial z} \left[v \frac{\partial (A_\theta)}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{v}{r} \frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} \right] = -J_\theta \\ \Gamma_1: A_\theta = A_{\theta 0} \\ \Gamma_2: \frac{v}{r} \frac{\partial (rA_\theta)}{\partial n} = -H_t \end{cases} \quad (2.54)$$

这时磁力线全部在 r, z 平面内，磁场强度只有 r 轴和 z 轴方向的分量，其表达式分别为：

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial (rA_\theta)}{\partial z} \quad (2.55)$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} \quad (2.56)$$

2. 等价变分问题

$$\begin{cases} W(A_\theta) = 2\pi \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2\mu} \left[\left(\frac{\partial A_\theta}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right)^2 \right] - J_\theta A_\theta \right\} = r dr dz - \int_{\Gamma_2} (-H_t) A dl = \min \\ A_\theta = A_{\theta 0} \end{cases} \quad (2.57)$$

为了直接应用平面稳定磁场的变分原理，令 $v' = \frac{v}{r}$ ，得

$$\begin{cases} \Omega: \frac{\partial}{\partial z} \left[v \frac{\partial (rA_\theta)}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[v \frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} \right] = -J_\theta \\ \Gamma_1: rA_\theta = rA_{\theta 0} \\ \Gamma_2: v' \frac{\partial (rA_\theta)}{\partial n} = -H_t \end{cases} \quad (2.58)$$

为了与平面稳定磁场一致，将坐标 z 和 r 分别改记为 x 和 y ，其等效变分问题为：

$$\begin{cases} W(u) = \iint_{\Omega} \left[\left(\int_0^{\epsilon} \beta C dC \right) \frac{1}{y} - J_{\theta} u \right] dx dy - \int_{\Gamma_2} (-H_t) u dl = \min \\ u = u_0 \end{cases} \quad (2.59)$$

其中：

$$u = rA_{\theta}$$

$$C = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\left[\frac{\partial(rA_{\theta})}{\partial z}\right]^2 + \left[\frac{\partial(rA_{\theta})}{\partial r}\right]^2}$$

3. 将以上条件变分问题离散为代数方程组，首先将计算区域剖分为有限多个一阶线性三角单元，图 3-8 所示为一个单元示意图。然后对单元构造插值函数：

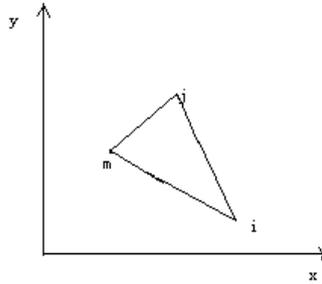


图 3-8 剖分单元示意图

$$u = N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \quad (2.60)$$

要求单元的三节点 i, j, m 按顺时针方向编号。此时

$$N_h = \frac{1}{2\Delta} (a_h + b_h x + c_h y) \quad (h = i, j, m) \quad (2.61)$$

式中

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j, a_j = x_m y_i - x_i y_m, a_m = x_i y_j - x_j y_i$$

$$b_i = y_j - y_m, b_j = y_m - y_i, b_m = y_i - y_j$$

$$c_i = x_m - x_j, c_j = x_i - x_m, c_m = x_j - x_i$$

$$\Delta = \frac{1}{2} (b_i c_j - b_j c_i) \text{ 三角形单元面积}$$

4. 将 u 对 x 和 y 分别求导

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta} (b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m) \quad (2.62)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta} (c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m)$$

5. 将插值函数及其对 x, y 的一阶偏导数代入能量泛函中，变分问题转化为能量函数求极值，将整个计算域上各单元的能量函数对同一接点磁位的一阶偏导数加在一起，并根据极值原理令其和为零，得非线性方程组

$$\begin{pmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & \cdots & k_{nn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

式中

$$k_{tt} = \frac{\nu}{4\Delta y} (b_{tt}^2 + c_{tt}^2) (t = i, j, m);$$

$$k_{ht} = \frac{\nu}{4\Delta y} (b_{ht}^2 + c_{ht}^2) (h, t = i, j, m \text{ 且 } h \neq t);$$

$$y = \frac{1.5}{\left(\frac{1}{y_j + y_m} + \frac{1}{y_m + y_i} + \frac{1}{y_i + y_j} \right)};$$

$$p_h = \frac{J_\theta \Delta}{3} (t = i, j, m)$$

6. 在求解过程中，有限元方程的系数矩阵采用非零元素压缩存储，对于非线性问题，由于磁阻率 ν 是变量，采用牛顿—拉夫逊迭代法求解。对应的牛顿—拉夫逊迭代格式为

$$[J]^k \{\Delta u\} = \{\Delta p\} \quad (2.64)$$

式中

$$\{\Delta u\} = \{u\}^{k+1} - \{u\}^k;$$

$$\{\Delta p\} = \{p\} - \{f(u)\};$$

$[J]^k$ 为第 k 次迭代的雅可比矩阵

$$[J]_e = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial u_i} & \frac{\partial f_i}{\partial u_j} & \frac{\partial f_i}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_j}{\partial u_i} & \frac{\partial f_j}{\partial u_j} & \frac{\partial f_j}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_m}{\partial u_i} & \frac{\partial f_m}{\partial u_j} & \frac{\partial f_m}{\partial u_m} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f_t}{\partial u_t} = k_{tt} + \frac{f_t^2}{y'v^2 B \Delta} \frac{\partial v}{\partial B} \\ \frac{\partial f_h}{\partial u_t} = k_{ht} + \frac{f_t f_h}{y'v^2 B \Delta} \frac{\partial v}{\partial B} \end{cases} (t = i, j, m) (h, t = i, j, m \text{ 且 } h \neq t)$$

$$\begin{cases} f_i = k_{ii} u_i + k_{ij} u_j + k_{im} u_m \\ f_j = k_{ji} u_i + k_{jj} u_j + k_{jm} u_m \\ f_m = k_{mi} u_i + k_{mj} u_j + k_{mm} u_m \end{cases}$$

$$\{\Delta p\}_e = \begin{bmatrix} p_i - f_i \\ p_j - f_j \\ p_m - f_m \end{bmatrix}$$

7. 计算结果

根据以上的有限元分析可以得到一系列电机稳态参数，如图 3-9~图 3-13 所示。

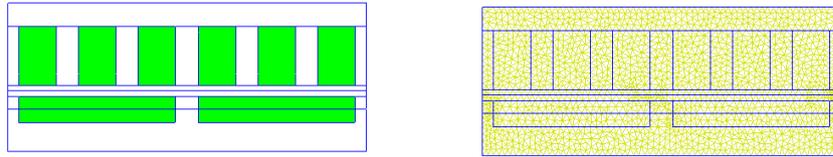


图 3-9 求解域及其剖分

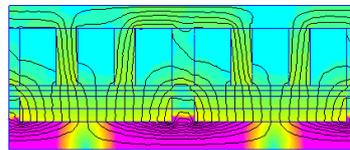


图 3-10 磁力线分布

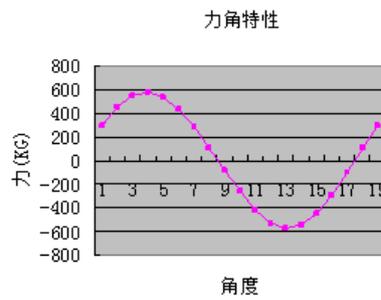


图 3-11 力角特性

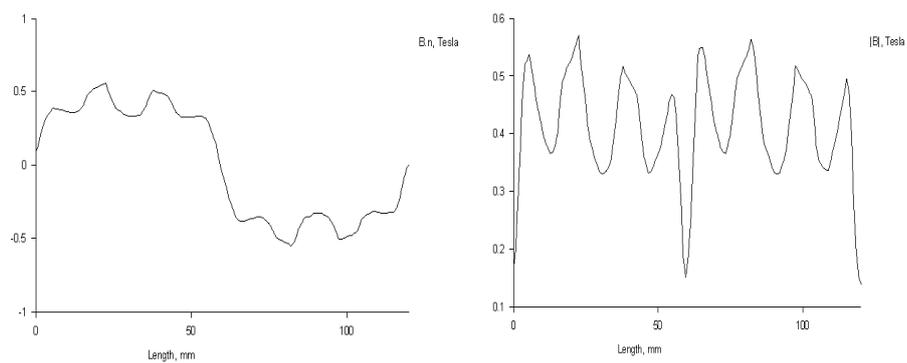


图 3-12 气隙磁感应强度

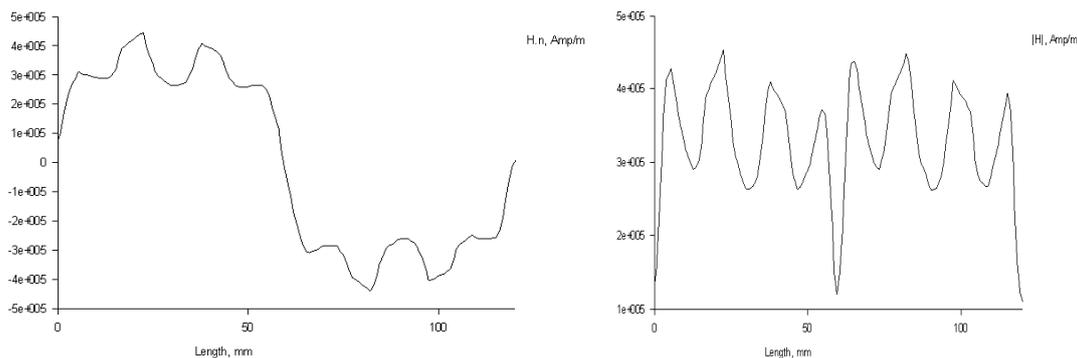


图 3-13 气隙磁场强度

3.2.2 凸极同步电机空载时的有限元分析

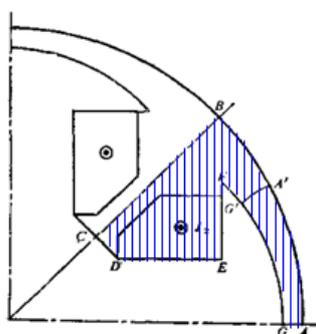


图 3-14 凸极同步电机剖面图

如图 3-14 所示，求解区域为 ABCDEFGA，假如把励磁电流看作为极身表面的面电流，并设面电流密度沿极高均匀分布。由于区域中没有电流，磁场为无旋的，故此时可用标量磁位进行求解。

1. 数学模型

其边值问题为

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega: \nabla^2 \varphi = \frac{\partial \varphi^2}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi^2}{\partial y^2} = 0 \\ \Gamma_1: H_t = -J_s \text{ (DE 上)} \\ \Gamma_1: H_t = 0 \text{ (AB、BC、CD、EF、FG 上)} \\ \Gamma_2: B_n = 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ (AG 上)} \end{array} \right. \quad (2.65)$$

为确定 DE、AB、BC、CD、EF、FG 上的 φ 值，令参考点 D 的标量磁位 $\varphi_D=0$ ，于是 $\varphi_D=\varphi_C=\varphi_B=\varphi_A=0$ ，在 DE 上任取点 T，它和 D 点之间的距离为 t ，该点磁位为

$$\varphi_T = \int_0^t (-H_t) dt + \varphi_D = \int_0^t J_s dt = J_s t \quad (2.66)$$

即 φ 在 DE 上呈线性变化，在 E 点上 $\varphi_E=J_s l$ ， $\varphi_F=\varphi_G=\varphi_E$ 。

由上述分析可知，场在求解区满足二维拉普拉斯方程，场的边界为混合型，即由齐次第一和第二类边界条件组成。将上述情况下的边值问题写成一般形式：

$$\begin{cases} \Omega: \nabla^2 u = \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} = 0 \\ \Gamma_1: u = u_0 \\ \Gamma_2: \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{q}{\beta} = 0 \end{cases} \quad (2.67)$$

其中 u 、 β 、 u_0 、 q 在用 φ 求解时分别代表 φ 、 μ 、 φ_0 、 $-B_n$ ，在用 A_Z 求解时分别代表 A_Z 、 v 、 A_{Z0} 、 $-H_t$ 。

2. 等价变分问题

将二维拉普拉斯方程 $\frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^2}{\partial y^2} = 0$ 改写为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\beta \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.68)$$

在上式两端乘上变分 δu ，在 Ω 区域内对 x 、 y 进行两重积分，得

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\beta \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] \delta u \, dx \, dy = 0 \\ & = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{\partial u}{\partial x} \delta u \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\beta \frac{\partial u}{\partial y} \delta u \right) \right] dx \, dy - \iint_{\Omega} \beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} \right) dx \, dy \end{aligned} \quad (2.69)$$

根据格林公式

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \delta u \, dx \, dy = \oint_s (P \, dy - Q \, dx) = \oint_s [P \cos(n, x) + Q \cos(n, y)] ds \quad (2.70)$$

上式中 $dx = -ds \cos(n, y)$ ， $dy = -ds \cos(n, x)$ ，如图 3-15 所示

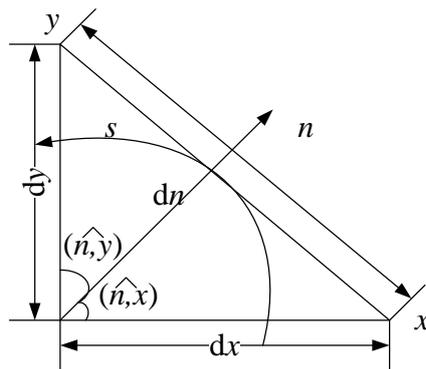


图 3-15 微分单元示意图

令

$$P = \beta \frac{\partial u}{\partial x} \delta u, \quad Q = \beta \frac{\partial u}{\partial y} \delta u \quad (2.71)$$

将式(2.69)和(2.71)代入式(2.70)得

$$\iint_{\Omega} \beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} \right) dx dy = \oint_s \beta \frac{\partial u}{\partial n} \delta u ds \quad (2.72)$$

其中左端可写为

$$\iint_{\Omega} \beta \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \delta u}{\partial y} \right) dx dy = \iint_{\Omega} \beta \left[\frac{\partial u}{\partial x} \delta \left(\frac{\delta u}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \delta \left(\frac{\delta u}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (2.73)$$

右端可写为

$$\oint_s \beta \frac{\partial u}{\partial n} \delta u ds = \int_{s_1} \beta \frac{\partial u}{\partial n} \delta u ds + \int_{s_2} \beta \frac{\partial u}{\partial n} \delta u ds \quad (2.74)$$

将式(2.67)中的边界条件代入式(2.74), 得

$$\iint_{\Omega} \beta \left[\frac{\partial u}{\partial x} \delta \left(\frac{\delta u}{\partial x} \right) + \frac{\partial u}{\partial y} \delta \left(\frac{\delta u}{\partial y} \right) \right] dx dy = 0 \quad (2.75)$$

将(2.75)的左端看出是一个泛函 W 的变分 δW , 即

$$\delta W[u(x, y)] = 0 \quad (2.76)$$

当媒质为线性时, 上述变分所对应的泛函 W 为

$$W[u(x, y)] = \iint_{\Omega} \frac{\beta}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \iint_{\Omega} \frac{\beta}{2} |\nabla u|^2 dx dy \quad (2.77)$$

其中,

$$\frac{\beta}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu} \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{\mu} = \frac{1}{2} BH = w_m \quad (2.78)$$

式(2.78)是磁场的储能密度, 故式(2.77)具有能量的量纲, 于是 $W[u(x, y)]$ 也称为能量泛函。

为了证明这一泛函在精确解 $u = u(x, y)$ 处达到极小, 假定 $u(x, y)$ 有一微小变形。即存

在变分 $\delta u = \alpha \eta(x, y)$, 其中 α 为一个小的实参数, 而 $\eta(x, y)$ 是在给定 $u(x, y)$ 值的所有边界点上为零的可微函数, 于是

$$\begin{aligned} W(u + \alpha \eta) &= \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \beta [\nabla(u + \alpha \eta)]^2 dx dy \\ &= \underbrace{\iint_{\Omega} \frac{1}{2} \beta |\nabla u|^2 dx dy}_A + \underbrace{\beta \alpha \iint_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla \eta) dx dy}_B + \underbrace{\frac{\beta}{2} \iint_{\Omega} \alpha^2 |\nabla \eta|^2 dx dy}_C \end{aligned} \quad (2.79)$$

其中

$$B = \underbrace{\beta \iint_{\Omega} \nabla \cdot (\alpha \eta \nabla u) dx dy}_D + \underbrace{\beta \alpha \iint_{\Omega} \eta \nabla^2 u dx dy}_E \quad (2.80)$$

应用格林定理,

$$D = \oint_s \beta \frac{\partial u}{\partial n} \delta u ds = \int_{s_1} \beta \frac{\partial u}{\partial n} \delta u ds + \int_{s_2} \beta \frac{\partial u}{\partial n} \delta u ds \quad (2.81)$$

另外, 在 S_1 上, $\delta u = 0$, 得

$$\beta \iint_{\Omega} \nabla \cdot (\alpha \eta \nabla u) dx dy = 0 \quad (2.82)$$

而边值问题式(2.67)中的偏微积分方程 $\nabla^2 u = 0$ ，得

$$E = \beta \alpha \iint_{\Omega} \eta \nabla^2 u dx dy = 0 \quad (2.83)$$

由此得 $B=0$ ，代入 (3.45) 得

$$W(u + \alpha \eta) = W(u) + \frac{\beta}{2} \iint_{\Omega} \alpha^2 |\nabla \eta|^2 dx dy \quad (2.84)$$

由于右端和积分项恒为正，因此，当 $\alpha=0$ 时，泛函将达到极小值，即当 $u=\underline{A}_z$ 为式(2.79)

所表示的边值问题的解时， $W(u) = \min$ 。

于是，与式(2.67)所表示的边值问题等价的条件变分问题为

$$\begin{cases} \Omega : W(u) = \iint_{\Omega} \frac{\beta}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \min \\ S_1 : u = u_0 \end{cases} \quad (2.85)$$

3.3 瞬态有限元法

以直线直流无刷电机为例,介绍二维瞬态场的有限元计算方法。

1. 瞬态电磁场基本方程

- (1) 忽略位移电流，即电磁场是似稳场；
- (2) 电枢部分做二维分布，端部效应由电机绕组的电路方程中常值端部电感计入；
- (3) 材料为各向同性，忽略铁磁材料的磁滞效应；
- (4) 永磁材料用等效面电流模拟；
- (5) 忽略电导率和磁导率的温度效应；
- (6) 忽略定转子叠片区及源电流区域的涡流效应。

瞬态场路耦合有限元方程组的获得是基于加辽金有限元方法的，用磁矢位描述场，瞬变电磁场的定解问题可以表达为

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial n} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) &= - \left(J_z - \sigma \frac{dA}{dt} \right) \\ \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial n} \Big|_{r^-} - \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial n} \Big|_{r^+} &= J_s \\ A \Big|_{AB} &= -A \Big|_{CD} \\ A \Big|_{AC} &= A \Big|_{BD} = 0 \end{aligned} \quad (2.86)$$

用加权余量法建立有限元离散化方程，取权函数等于形状函数 $\{N\}^T$

$$\iint_{\Omega_e} (\{N\}^T \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right] + \{N\}^T J_z - \{N\}^T \sigma \frac{dA}{dt}) dx dy = 0 \quad (2.87)$$

将面积分看作单元积分之和，对上式离散，如采用一阶线性三角形单元，上式第一项积分

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega_e} \{N\}^T \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right] dx dy \\ &= - \iint_{\Omega_e} \left(\left[\frac{\partial N}{\partial x} \right]_e \left\{ \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} \right\} + \left[\frac{\partial N}{\partial y} \right]_e \left\{ \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} \right\} \right) dx dy + \oint_{l_e} \{N\}^T \frac{1}{\mu} \frac{dA}{dt} \end{aligned} \quad (2.88)$$

第二项积分

$$\iint_{\Omega_e} \{N\}^T J_z dx dy = J_z \iint_{\Omega_e} \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_m \end{bmatrix} dx dy = \frac{\Delta N_e I}{3aA_b} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [C]_e [I]_e \quad (2.89)$$

第三项积分

$$\iint_{\Omega_e} \{N\}^T \left(-\sigma \frac{dA}{dt} \right) dx dy = -\sigma \frac{d}{dt} \iint_{\Omega_e} \{N\}^T [N]_e [A]_e dx dy = -[T]_e \frac{d}{dt} [A]_e \quad (2.90)$$

$$[T]_e = \sigma \Delta \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

2. 有限元离散方程

$$[K][A] = [C][I] - [T] \frac{d[A]}{dt} \quad (2.92)$$

令 $\left[\dot{A} \right] = \frac{d[A]}{dt}$ 得

$$[K][A] + [T] \left[\dot{A} \right] = [C][I] \quad (2.93)$$

(1) 场路耦合方程

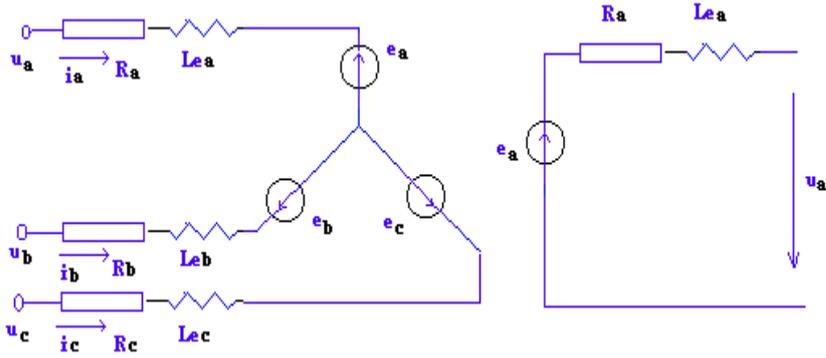


图 3-16 电枢绕组等效电路

根据图 3-16，可得相绕组电动势

$$e_a = -\frac{d\psi_a}{dt} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{N_1 L_{ef} P}{a A_b} \sum_1^q \sum_{e=1}^{mp} \frac{\Delta_e (A_i^e A_j^e A_m^e)}{3} \right) \quad (2.94)$$

$$[E] = -P L_{ef} [C]^T [\dot{A}] \quad (2.95)$$

绕组的电路方程

$$[U] = [E] + [R][I] + [L][\dot{I}] \quad (2.96)$$

$$[U] = -P L_{ef} [C]^T [\dot{A}] + [R][I] + [L][\dot{I}] \quad (2.97)$$

(2) 场路空间耦合

$$\begin{bmatrix} K & -C \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -P L_{ef} C^T & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{A} \\ \dot{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ U \end{bmatrix} \quad (2.98)$$

(3) 时域离散

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{bmatrix} K^{n+1} & -C \\ 0 & R \end{bmatrix} \beta \cdot \Delta t + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -P L_{ef} C^T & L \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} A^{n+1} \\ I^{n+1} \end{bmatrix} \\ & + \left\{ \begin{bmatrix} K^n & -C \\ 0 & R \end{bmatrix} (1-\beta) \cdot \Delta t - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -P L_{ef} C^T & L \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} A^n \\ I^n \end{bmatrix} \\ & = (1-\beta) \Delta t \begin{bmatrix} 0 \\ U^n \end{bmatrix} + \beta \cdot \Delta t \begin{bmatrix} 0 \\ U^{n+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.99)$$

其中， $\beta=0.0$ 为显式差分格式； $\beta=0.5$ 为 Crank-Nicolson 差分格式； $\beta=1.0$ 为隐式差分格式； $\beta=2/3$ 为 Galerlin 差分格式。

(4) 瞬态结果

根据以上的有限元分析可以得到一系列电机瞬态参数，如图 3-9~图 3-24 所示。

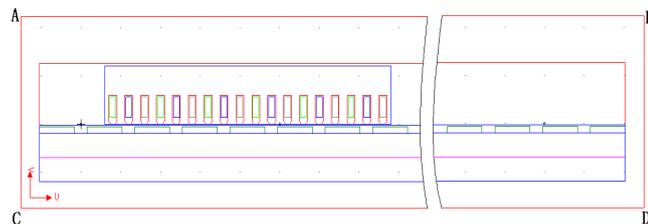


图 3-17 求解域

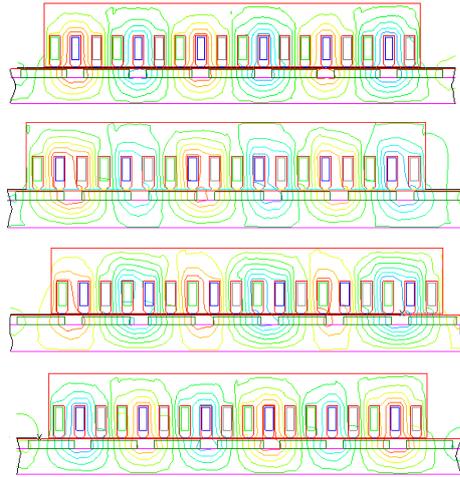


图 3-18 不同时刻磁场分布

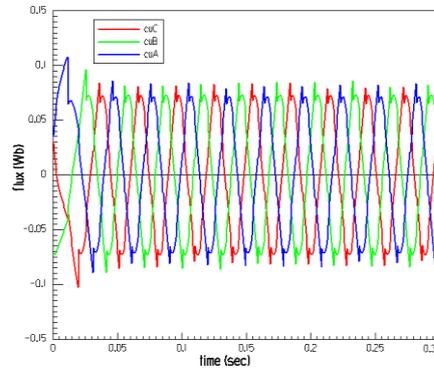


图 3-19 三相绕组磁链变化

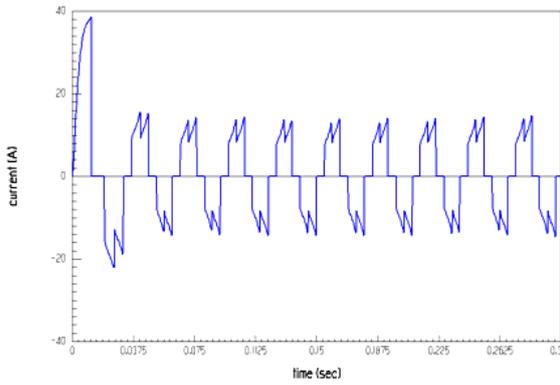


图 3-20 A 相电流

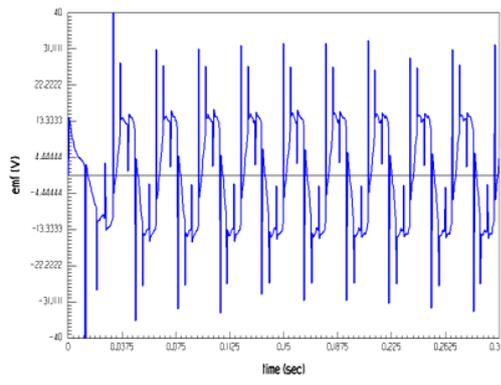


图 3-21 A 相反电势

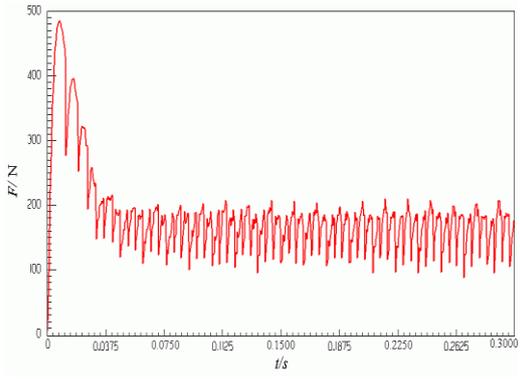


图 3-22 电磁推力

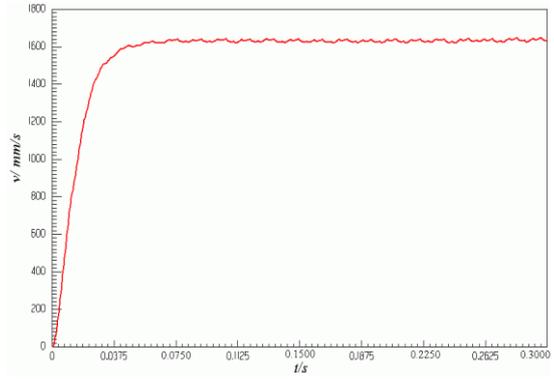


图 3-23 速度

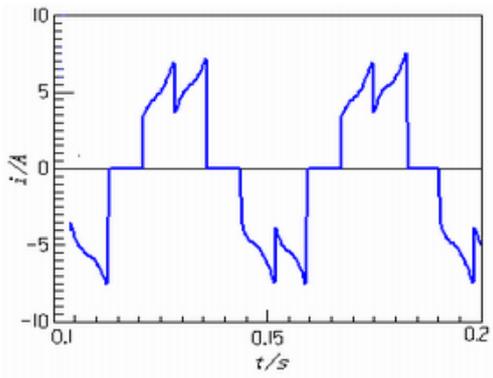


图 3-24 电流计算结果

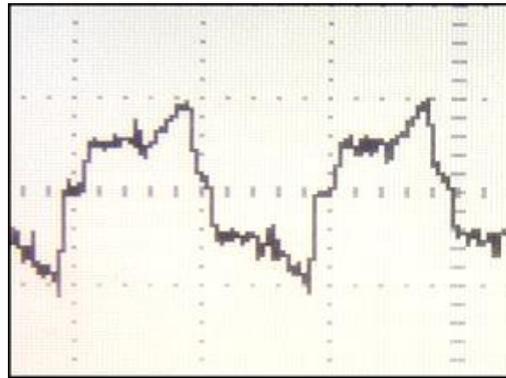


图 3-25 电流实验结果